제2교시

# 적분

2022년 교육청 4월13

*1.* 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} \int_1^x (x-t)f(t)dt = 3$$

을 만족시킬 때, $\int_1^2 (4x+1)f(x)dx$의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

$$\int_1^2 (2-t)f(t)dt = 0 \quad ①$$

$$\int_1^x (x-t)f(t)dt = x\int_1^x f(t)dt - \int_1^x tf(t)dt$$

$$= (x-2)\int_1^x f(t)dt + \int_1^x (2-t)f(t)dt \quad ①$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\int_1^x f(t)dt + \int_2^x (2-t)f(t)dt}{x-2}$$

$$= \int_1^2 f(t)dt + 0 = 3$$

$$2\int_1^2 f(t)dt - \int_1^2 tf(t)dt = 6 - \int_1^2 tf(t)dt = 0$$

$$\int_1^2 tf(t)dt = 6, \quad \int_1^2 f(t)dt = 3$$

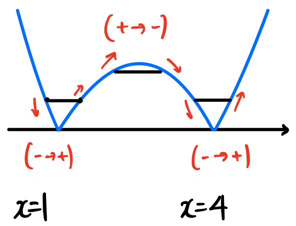
$$4\int_1^2 tf(t)dt + \int_1^2 f(t)dt = 27$$

2023학년도 평가원 6월 20

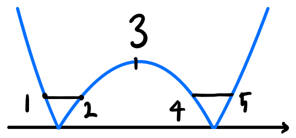
*2.* 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오.

$$g'(x) = |f(x+1)| - |f(x)|$$

$x=1$과 $x=4$에서 부호변화$(- \to +)$




→ 부호변화가 $(- \to +)$인 지점 관찰




$f(x) = 2(x-3)^2 + k$

$f(1) = -f(2)$

$k+8 = -(k+2) \quad k=-5$

$\therefore f(x) = 2(x-3)^2 - 5$

$f(0) = 13$

2023학년 평가원 11월 12

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, $n$은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx$의 값은?

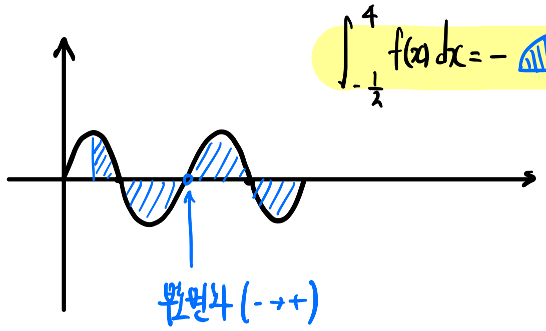
① $-\frac{3}{2}$  ② $-\frac{1}{2}$  ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$  ⑤ $\frac{5}{2}$

$g'(2) = f(x) + f(x) = 2f(x)$  부호변화 $- \to +$

$g(2) = \int_0^2 f(x)dx - \int_2^4 f(x)dx = 0$

$\int_{-\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx = - \quad = -\frac{1}{2}$




2023년 교육청 7월 11

4. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(1+x) + f(1-x) = 0$이다.
> (나) $\int_{-1}^{3} f'(x)dx = 12$  $f(1)=0$, $(1, f(1))$에 대해 점대칭

$f(4)$의 값은?

① 24  ② 28  ③ 32

④ 36  ⑤ 40

$\int_{-1}^{3} f'(x)dx = f(3) - f(-1) = 12$

$f(3) = -f(-1) \quad \therefore f(3) = 6$

$f(x) = (x-1)\{(x-1)^2 + k\}$

$f(3) = 2(4+k) = 6 \quad k = -1$

$\therefore f(x) = (x-1)\{(x-1)^2 - 1\}$

$f(4) = 3 \times 8 = 24$

2024학년도 평가원 9월 22

5. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오.

$\int_1^1 f(t)dt = f(1)-3=0$ $f(1)=3$

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$ (가) 미분

$f'(x)=4$, $f(x)=4x-1$, $F(x)=2x^2-x+C_2$

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_1$ (나) 적분

$(2x^2-x+C_2)G(x)=2x^4+x^3+x+C_1$ ( $G(x)$는 다항함수)

$G(x)=x^2+x$

$\int_1^3 g(x)dx=[G(x)]_1^3=12-2=10$

2024학년도 평가원 6월 20

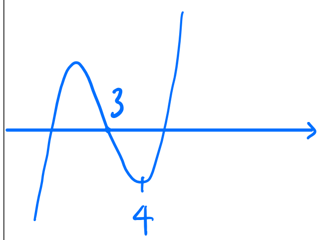
6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오.

$x \ge 1$인 모든 실수 $x$에 대하여
$g(x) \ge g(4)$이고 $|g(x)| \ge |g(3)|$이다.

$g'(4)=0$ $g(3)=0$




$g(0)=0$, $g(3)=0$, $g'(4)=0$

$g'(x)=f(x)$ $\int_0^3 f(x)dx=0$, $f(4)=0$

$f(x)=(x-4)(x-k)$

$\int_0^3 (x-4)(x-k)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{(k+4)}{2}x^2+4kx\right]_0^3$

$=9-\frac{9(k+4)}{2}+12k=\frac{15}{2}k-9=0$

$k=\frac{6}{5}$

$f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$, $f(9)=5\times\frac{39}{5}=39$

2025학년도 평가원 9월 15

7. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 $x$에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_{1}^{x} tf(t)\,dt + \int_{-1}^{x} tg(t)\,dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$
>
> (나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)\,dx$ 의 값은?

① 72 ② 76 ③ 80
④ 84 ⑤ 88

$x f(x) + x g(x) = 12x^3 + 24x^2 - 6x$ (가) 미분

$f(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$

(나)

$x g'(x) + g(x) = 12x^2 + 24x - 6$

적분

$x g(x) = 4x^3 + 12x^2 - 6x$

$g(x) = 4x^2 + 12x - 6$

$\int_0^3 g(x)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 6x\right]_0^3$

$= 36 + 54 - 18 = 72$

2024년 교육청 7월 12

8. 두 상수 $a$, $b$에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$이다.
>
> (나) 모든 실수 $x$에 대하여 $f(x+4) = f(x) + 16$이다.

$\int_{4}^{7} f(x)\,dx$의 값은?

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$
④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

$f(4) = f(0) + 16$

$64 + 16a + 4b = 16$ , $4a + b = -12$

$f'(4) = f'(0)$

$8a + 48 + b = b$ , $a = -6$

$\therefore a = -6, b = 12$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

$\int_4^7 f(x)\,dx = \int_0^3 f(x+4)\,dx = \int_0^3 f(x) + 16\,dx$

$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 6x^2\right]_0^3 + 48$

$= \frac{81}{4} + 48 = \frac{273}{4}$

2024년 교육청 3월 12

9. 실수 $a$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+3x+a & (x<0)\\ 3x+a & (x\geq 0)\end{cases}$$

이다. 함수

$$g(x)=\int_{-4}^{x} f(t)dt$$

가 $x=2$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $g(x)$의 극댓값은?

① 18 ② 20 ③ 22
④ 24 ⑤ 26

$g(-4)=0,\ g'(2)=f(2)=0$

$f(2)=6+a=0 \quad a=-6$

$f(x)=3(x^2+x-2)\ (x<0)$

극대 → $x=-2$에서

$\therefore$ 극댓값 $=\int_{-4}^{-2} f(x)dx$

$=\left[x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\right]_{-4}^{-2}$

$=(-8+6+12)-(-64+24+24)$

$=26$

2024년 교육청 10월 20

10. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에 대하여

$$\{f(x)\}^2=2\int_{3}^{x}(t^2+2t)f(t)\,dt$$

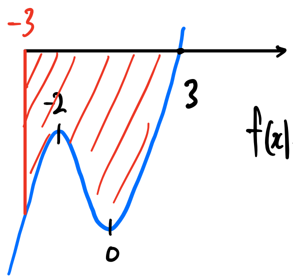
를 만족시킬 때, $\int_{-3}^{0} f(x)\,dx$의 최댓값을 $M$, 최솟값을 $m$이라 하자. $M-m$의 값을 구하시오.

① $f(3)=0$

② $2\{f(x)\}\cdot f'(x)=2(x^2+2x)f(x)$

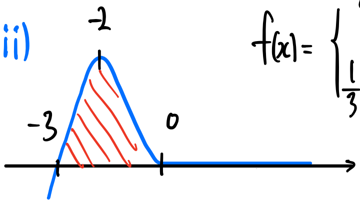
→ $f(x)=0$ or $f'(x)=x^2+2x$

i)




$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-18$

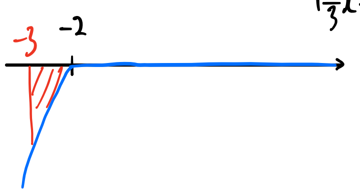
ii)




$f(x)=\begin{cases}0 & (x\geq 0)\\ \frac{1}{3}x^3+x^2 & (x<0)\end{cases}$

iii)

$f(x)=\begin{cases}0 & (x\geq -2)\\ \frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3} & (x<-2)\end{cases}$




iv)



$f(x)=0$

$M=\int_{-3}^{0}\frac{1}{3}x^3+x^2dx \quad m=\int_{-3}^{0}\frac{1}{3}x^3+x^2-18dx$

$M-m=\int_{-3}^{0}18dx=54$

빠른 정답

1. [정답] ⑤
2. [정답] 13
3. [정답] ②
4. [정답] ①
5. [정답] 10

6. [정답] 39
7. [정답] ①
8. [정답] ④
9. [정답] ⑤
10. [정답] 54

i) $\int_a^x f(x)\,dx =$ 함수 의 형태로 주어질시

→ 일단 $x=a$ 넣어보기

→ 그후 미분

ii) 문제에서 굳이 극값이 아니라 극소,극댓값 주었을 경우

도함수의 부호가 $- \to +$ 또는 $+ \to -$ 인지 집중

iii) $f'(x)$와 $f(x)$의 관계에서 $\int_a^b f'(x)$ 와 같은 형태를 그대로 쓰거

$f(b)-f(a)$로 변형할지 고려 될수

→ 그 반대도 존재함.