**[문제 1]** 1부터 30까지의 수가 적힌 카드가 한 장씩 들어 있는 주머니에서 카드를 한 장씩 뽑는다. 처음 뽑은 카드의 숫자를 $m$, 다시 넣지 않고 두 번째로 뽑은 카드의 숫자를 $n$이라 하자.

**[문제 1-1]** 확률변수 $X=\int_1^e \{m-n(\ln x)^2\}dx$라 할 때, 기댓값 $\mathrm{E}(X)$의 값을 구하시오. **[10점]**

**[문제 1-2]** 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 $x$, $y$, $z$에 대하여, 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수를 확률변수 $Y$라 할 때, $\mathrm{E}\left(\frac{2\mathrm{Y}+1}{3^7}\right)$의 값을 구하시오. **[20점]**

| |
|---|
| (Ⅰ) $xyz=\frac{30!}{mn}$ |
| (Ⅱ) $x>y>z$ |
| (Ⅲ) $x$와 $y$, $y$와 $z$, $z$와 $x$는 각각 서로소이다. |

〔문제 1-1〕

$X=\int_1^e \{m-n(\ln x)^2\}dx = \left[mx-nx(\ln x)^2+2nx\ln x-2nx\right]_1^e = m(e-1)-n(e-2)$이고

가능한 모든 순서쌍 $(m, n)$에 대한 확률이 모두 $\frac{1}{30}\times\frac{1}{29}=\frac{1}{870}$이므로

$E(X)=\sum_{m=1}^{30}\sum_{n=1}^{30}\frac{m(e-1)-n(e-2)}{870}-\sum_{k=1}^{30}\frac{k}{870}=\sum_{m=1}^{30}\left\{\frac{m(e-1)}{29}-\frac{31}{58}(e-2)\right\}-\frac{31}{58}=\frac{31}{2}$이다.

〔문제 1-2〕

$30=2^{26}\times 3^{14}\times 5^7\times 7^4\times 11^2\times 13^2\times 17\times 19\times 23\times 29$이고 이때 $x, y, z$의 소인수는 모두 달라야 한다. 또한 $x>y>z$이므로 $\frac{30!}{mn}$의 소인수가 모두 $k$개일 경우 가능한 $(x, y, z)$의 개수는 대소 상관없이 $3^k$개, 두 수가 같은 경우는 3개이므로 대소를 생각하면 $\frac{3^k-3}{3!}=\frac{3^{k-1}-1}{2}$ 이다. 여기서 $\frac{30!}{mn}$의 소인수의 개수에 따라 다음처럼 경우를 나누어 생각할 수 있다.

<table>
<tr><th>$(m,\ n)$</th><th>가능한 $(m,\ n)$의 수</th><th>$Y$</th></tr>
<tr><td>$m, n$의 소인수는<br>모두 13 이하<br>(단, $\{m,\ n\}\neq\{11,\ 22\}$,<br>$\{m,\ n\}\neq\{13,\ 26\}$)</td><td>$26\times 25-4=646$</td><td>$\frac{30!}{nm}$의 소인수가 10개 → $\frac{3^9-1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$\{m,\ n\}=\{11,\ 22\}$<br>또는 $\{m,\ n\}=\{13,\ 26\}$</td><td>4</td><td rowspan="2">$\frac{30!}{nm}$의 소인수가 9개 → $\frac{3^8-1}{2}$</td></tr>
<tr><td>$m, n$중 17 이상의 소수가 1개</td><td>$2\times 4\times 26=208$</td></tr>
<tr><td>$m, n$는 모두 17 이상의 소수</td><td>$4\times 3=12$</td><td>$\frac{30!}{nm}$의 소인수가 8개 → $\frac{3^7-1}{2}$</td></tr>
</table>

따라서 $E(Y)=323\times\frac{3^9-1}{870}+106\times\frac{3^8-1}{870}+6\times\frac{3^7-1}{870}=\frac{3^7\times 1077}{290}-\frac{1}{2}$ 이므로

$E\left(\frac{2Y+1}{3^7}\right)=\frac{2E(Y)+1}{3^7}=\frac{1077}{145}$이다.

**[문제 2]** 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고 미분가능하며, $f'(x) \neq 0$이다. 좌표평면상의 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에 대하여, 점 P에서의 접선이 $x$축, $y$축과 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족하는 점 Q의 $x$좌표와 $y$좌표를 각각 $X$, $Y$라 하자. (단, O는 좌표평면상의 원점이다.)

**[문제 2-1]** 양의 실수 $a$, $b$에 대하여 $f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$ $(0<x<a)$라 할 때, $XY$의 최댓값을 구하시오. **[15점]**

**[문제 2-2]** 함수 $f(x)$가 $f(x)>0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (Ⅰ) $f(1)=3$<br>(Ⅱ) 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 P에 대하여, $XY=c$ ($c$는 상수)이다. |

이때, 함수 $\{f(x)\}^2+\frac{1}{f(x)}$이 $x=k$에서 최솟값을 가질 때, $k$의 값을 구하시오. **[15점]**

〔문제 2-1〕 $y=f(x)=\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$, $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이므로

$y=f(x)$는 중심이 원점이고 두 축의 길이가 $2a$, $2b$인 타원의 일부분이다.

따라서 $P(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은 $\frac{tx}{a^2}+\frac{f(t)y}{b^2}=1$이고 $A(\frac{a^2}{t},\ 0)$, $B(0,\ \frac{b^2}{f(t)})$이며

$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a^2}{t}-t,\ \frac{b^2}{f(t)}-f(t)\right)$이므로 $Q(\frac{a^2}{t}-t,\ \frac{b^2}{f(t)}-f(t))$이다.

여기서 $XY=\left(\frac{a^2}{t}-t\right)\left(\frac{b^2}{f(t)}-f(t)\right)=\frac{a^2b^2}{tf(t)}-\frac{b^2t}{f(t)}-\frac{a^2f(t)}{t}+tf(t)$이고

$b^2t^2+a^2\{f(t)\}^2=a^2b^2$이므로 $XY=tf(t)=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}t^2(a^2-t^2)}=\sqrt{-\frac{b^2}{a^2}(t^2-\frac{a^2}{2})^2+\frac{a^2b^2}{4}}$ 이다.

따라서 $XY$는 $t^2=\frac{a^2}{2}$, $t=\frac{\sqrt{2}}{2}a$일 때 최솟값 $\frac{ab}{2}$를 갖는다.

〔문제 2-2〕 점 $P(t, f(t))$, $A(p, 0)$, $B(0, q)$라고 하면 $XY=(q-f(t))(p-t)=c$이다.

점 $A, B, P$는 모두 점 $P$에서의 접선 위의 점이므로 $\frac{f(t)}{t-p}=\frac{f(t)-q}{t}=f'(t)$, $tf(t)=c$,

$f(t)=\frac{c}{t}$ $(t\neq 0)$이고 $f(1)=3$이므로 $c=3$이다.

또한 $g(x)=\{f(x)\}^2+\frac{1}{f(x)}=\frac{9}{x^2}+\frac{x}{3}$, $g'(x)=\frac{1}{3}-\frac{18}{x^3}$이므로

$g(x)$는 $x<3\sqrt[3]{2}$일 때 감소하고 $x\geq 3\sqrt[3]{2}$일 때 증가한다. 따라서 $k=3\sqrt[3]{2}$이다.

**[문제 3]** 좌표평면 위의 원점 O와 네 개의 점 P, Q, R, S가 있다. 점 P의 좌표는 $P(f(t),\ g(t))$이고, 점 P′의 좌표는 $P'(f'(t),\ g'(t))$이다. 네 개의 점 P, Q, R, S가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (Ⅰ) $\overrightarrow{OP} /\!/ \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$, $a\lvert\overrightarrow{OP}\rvert=\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ (단, $a$는 1보다 큰 실수이다.) |
| (Ⅱ) $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{OP'}=0$, $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}>0$, $\lvert\overrightarrow{PR}\rvert=\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$ |
| (Ⅲ) $\overrightarrow{PR} /\!/ \overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PS}<0$, $b\lvert\overrightarrow{PR}\rvert=\lvert\overrightarrow{PS}\rvert$ (단, $b$는 실수이다.) |

**[문제 3-1]** $a=2$, $b=5$이고, $f(t)=t$, $g(t)=4-2t$일 때, $\int_0^2(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2dt$의 값을 구하시오. **[10점]**

**[문제 3-2]** $a=5$이고 $f(t)=2\cos t$, $g(t)=\sin t$일 때, 점 $T(0,\ 1)$에 대하여 $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2$의 최댓값을 구하시오. **[15점]**

**[문제 3-3]** $a>2$이고 $f(t)g(t)=1$, $f(t)>a$, $f'(t)>0$일 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}>0$임을 보이시오. **[15점]**

## 〔문제 3-1〕

$P(t, 4-2t)$, $P'(1, -2)$이므로 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2=100\lvert\overrightarrow{OP}\rvert^4\sin^2\theta$이고,

($\theta$는 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OP'}$가 이루는 각. 이때 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{PS}$이므로 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PS}$이 이룰 수 있는 각은

$\theta+\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta-\frac{\pi}{2}$이며 $\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\theta$이다.)

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP'}}{\lvert\overrightarrow{OP}\rvert\lvert\overrightarrow{OP'}\rvert}=\dfrac{5t-8}{\sqrt{5\{t^2+(4-2t)^2\}}}$이므로 $(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2=320(5t^2-16t+16)$이다.

따라서 $\int_0^2(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PS})^2dt=\int_0^2 320(5t^2-16t+16)dt=320\times\frac{40}{3}=\frac{12800}{3}$이다.

## 〔문제 3-2〕

$P(2\cos t, \sin t)$, $P'(-2\sin t, \cos t)$이므로 $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2=25\lvert\overrightarrow{OP}\rvert^2\sin^2\theta$이다.

($\theta$는 $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{OP'}$가 이루는 각. 이때 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{PR}$이므로 $\overrightarrow{OP'}$, $\overrightarrow{PR}$이 이룰 수 있는 각은

$\theta+\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta-\frac{\pi}{2}$이며 $\cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\theta$이다.)

$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{OP'}}{\lvert\overrightarrow{OT}\rvert\lvert\overrightarrow{OP'}\rvert}=\dfrac{\cos t}{\sqrt{4-3\cos^2 t}}$이므로 $(\overrightarrow{OT}\cdot\overrightarrow{PR})^2=\dfrac{100(3\cos^2 t+1)(1-\cos^2 t)}{4-3\cos^2 t}$

이고 $0\le\cos^2 t\le 1$이므로 $\cos^2 t=\frac{4-\sqrt{5}}{3}$일 때 최댓값 $200\left(1-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$을 갖는다.

$\left(f(x)=\dfrac{(3x+1)(x-1)}{3x-4}, f'(x)=\dfrac{9x^2-24x+11}{(3x-4)^2},\ x=\dfrac{4-\sqrt{5}}{3}\right.$ 극대, $\left.x=\dfrac{4+\sqrt{5}}{3}\right.$ 극소)

## 〔문제 3-3〕

$x=f(t), x'=f'(t)$라고 하면 $P(x, \frac{1}{x})$, $P'(x', -\frac{x'}{x^2})$이다. 또한 $\overrightarrow{OP'}\perp\overrightarrow{PR}$, $a\lvert\overrightarrow{OP}\rvert=\lvert\overrightarrow{PR}\rvert$

이므로 $R(x+p,\ \frac{1}{x}+x^2p)$이라고 하면 $p^2(x^4+1)=a^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$, $p^2x^2=a^2$, $p=\pm\frac{a}{x}$이다.

따라서 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=x(x+p)+\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+x^2p\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+2px=\ x^2+\frac{1}{x^2}\pm 2a$이다.

이때 $x=f(t)>a$, $a>2$이고 $x^2>a^2>2a$이므로 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}>0$을 만족한다.