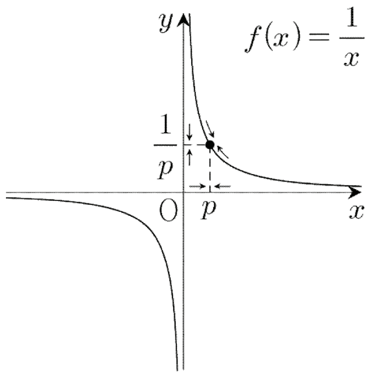
D. 함수의 연속: 분수함수

▶ 기출 문제 p.21

• 분수함수의 연속성

함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$의 연속성에 대하여 알아보자.



위의 그림처럼 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에 속하는 임의의 실수 p에 대하여

$\lim_{x \to p} f(x)=f(p)$

이므로 함수 $f(x)$는 두 구간 $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ \infty)$에서 연속이다.

하지만 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이 아니다.

이처럼 점에서의 연속성과 구간에서의 연속성을 구별할 수 있어야 한다.

몇 개의 예를 더 생각해보자.

함수 $y=\dfrac{1}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다.

(왜냐하면 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

그리고 이 함수는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다. (왜냐하면 $x=1$, $x=2$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

그리고 이 함수는 세 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ \infty)$에서 연속이다.

함수 $y=\dfrac{(x-1)(x-2)}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이다.

(왜냐하면 $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

그리고 이 함수는 두 구간 $(-\infty,\ 1)$, $(1,\ \infty)$에서 연속이다.

이 함수의 방정식을 정리하면

$y=x-2(x\neq1)$

이다. 이때, 이 함수가 $x=1$에서 불연속임을 잊어서는 안 된다.

함수 $y=\dfrac{x}{x(x-1)}$은 $x=0$, $x=1$에서 불연속이다.

(왜냐하면 $x=0$, $x=1$에서 함숫값이 정의되지 않기 때문이다.)

이 함수의 방정식을 정리하면

$y=\dfrac{1}{x-1}$ (단, $x\neq0$, $x\neq1$)

이다. 이때, 이 함수가 $x=0$에서 불연속임을 잊어서는 안 된다.

함수 $y=\dfrac{1}{x^2-x+1}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

왜냐하면 모든 실수 x에 대하여

(분모)$=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이기 때문이다.

함수 $y=\dfrac{1}{ax^2+bx+c}(a\neq0)$이 실수 전체의 집합에서 연속일 필요충분조건은

$ax^2+bx+c\neq0$ 즉, (판별식)$=b^2-4ac<0$

이다. 다시 말하면 (분모)$\neq0$

$\Leftrightarrow$ (분모)>0 또는 (분모)<0이다.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

은 적어도 1개 이상의 점에서 불연속이다.

왜냐하면 모든 삼차방정식 $f(x)=0$은 적어도 하나 이상의 실근을 갖기 때문이다. 이때, 한 실근을 α라고 하면

$f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)\ (a\neq 0)$

이고, 함수

$$y=\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

예제 1

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $x=0$에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)g(x)=x$
(나) $g(0)=1$

이때, $f(2)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

풀이

조건 (나)에서

$f(0)g(0)=f(0)\times 1=0$, 즉, $f(0)=0$

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2+ax$

로 두자.

조건 (가)에서

$$g(x)=\frac{x}{f(x)}\ (\text{단, } f(x)\neq 0)$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$ 즉,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2+ax}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+a}=\frac{1}{a}=1,\ a=1$$

$\therefore\ f(x)=x^2+x$

$\therefore\ f(2)=6$

답 ④

예제 2

삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$y=\frac{1}{f(x)}$$

의 연속성을 판단하시오.

풀이

$f(x)=(x-\alpha)(ax^2+bx+c)$ (단, $a\neq 0$)

$f(x)=0$

$\Leftrightarrow$ $x=\alpha$ 또는 $ax^2+bx+c=0(\cdots(*))$

이차방정식 (*)의 판별식을 D라고 하자.

$D>0$: (*)의 서로 다른 두 실근을 β, γ라고 하자.

$$f(x)=\frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$\beta\neq\alpha$, $\gamma\neq\alpha$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, β, γ에서 불연속이다.

$\beta=\alpha(\gamma\neq\alpha)$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, γ에서 불연속이다.

$\gamma=\alpha(\beta\neq\alpha)$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, β에서 불연속이다.

$D=0$: (*)의 중근을 β라고 하자.

$$f(x)=\frac{1}{a(x-\alpha)(x-\beta)^2}$$

$\beta\neq\alpha$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$, β에서 불연속이다.

$\beta=\alpha$인 경우: 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

$D<0$: (*)는 실근을 갖지 않는다.

$$f(x)=\frac{1}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}$$

함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다.

답 풀이 참조

D. 함수의 연속: 역함수

▶ 기출 문제 p.22

이 주제에 대한 특별한 실전 이론은 없습니다.

예제 1

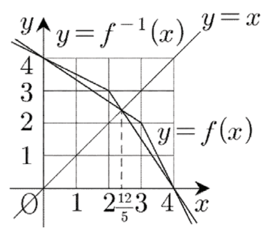
연속함수 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{3}x+4 & (x\leq 3)\\ -2x+a & (x>3)\end{cases}$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 만나는 교점들의 x좌표의 합을 구하시오.

풀이

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 3+}f(x)=f(3)$, 즉 $a-6=2$, $a=8$

두 함수 $f(x)$, $f^{-1}(x)$의 그래프를 한 평면 위에 그리면



위의 그림에서

방정식 $f(x)=f^{-1}(x)$의 해집합은 $\left\{0,\ \dfrac{12}{5},\ 4\right\}$이다.

따라서 구하는 값은 $\dfrac{32}{5}$이다.

답 $\dfrac{32}{5}$

D050

○○
(2022(예시문항)−공통7)

함수

$$f(x)=\begin{cases}x-4 & (x<a)\\ x+3 & (x\geq a)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ 0　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

D051

●●●
(2006(6)−가형15)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{x\to0}f(x)$와 $\lim_{x\to0}g(x)$가 모두 존재하지 않으면 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄴ. $y=f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $y=|f(x)|$도 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $y=|f(x)|$가 $x=0$에서 연속이면 $y=f(x)$도 $x=0$에서 연속이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

D. 함수의 연속: 분수함수

▶ 실전 이론 p.140

D052

○○○
(2019(6)−나형28)

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\frac{x}{f(x)}$는 $x=1$, $x=2$에서 불연속이다.

(나) $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=4$

$f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

D053

●●● (2019－나형21)

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

D. 함수의 연속: 역함수

▶ 실전 이론 p.142

D054

★★★ (2019(6)－나형29)

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\frac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

E. 삼차함수의 그래프: 변곡접선

▶ 기출 문제 p.80

예제 1

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=x^3-3x$에 그을 수 있는 접선의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 불연속이 되는 모든 실수 t의 값의 합을 구하시오.

풀이1 대수적

접점의 x좌표를 s로 두자.
접선의 방정식은
$y=(3s^2-3)(x-s)+s^3-3s$
이 직선이 점 $(t,\ 2)$를 지나므로
$2=(3s^2-3)(t-s)+s^3-3s$
정리하면
$(s+1)\{2s^2-(3t+2)s+3t+2\}=0\cdots(*1)$
$\Leftrightarrow$ $s=-1$ 또는
$2s^2-(3t+2)s+3t+2=0 \quad\cdots(*2)$
(*2)에 $s=-1$을 대입하면 $t=-1$
$t=-1$을 (*2)에 대입하면
$2s^2+s-1=0,\ (2s-1)(s+1)=0$
풀면 $s=\dfrac{1}{2}$ 또는 $s=-1$
즉, $t=-1$이면 삼차방정식 (*1)의 해집합은
$\left\{-1,\ \dfrac{1}{2}\right\}$이다. 이때, -1은 중근이다.
이차방정식 (*2)의 판별식을 D라고 하자.
$D=(3t+2)^2-4\times2\times(3t+2)=3(3t+2)(t-2)$

(1) $D>0$인 경우 $\left(t<-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t>2\right)$

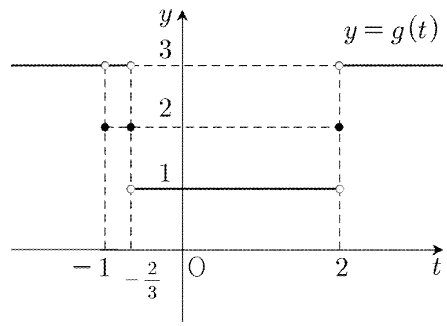
$t<-1$ 또는 $-1<t<-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t>2$이면
이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 2이므로
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
$t=-1$이면
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $D=0$인 경우 $\left(t=-\dfrac{2}{3}\right.$ 또는 $\left.t=2\right)$

이차방정식 (*2)의 서로 다른 실근의 개수가 1이므로
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(3) $D<0$인 경우 $\left(-\dfrac{2}{3}<t<2\right)$

이차방정식 (*2)가 허근을 가지므로
삼차방정식 (*1)의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.
함수 $g(t)$의 그래프는



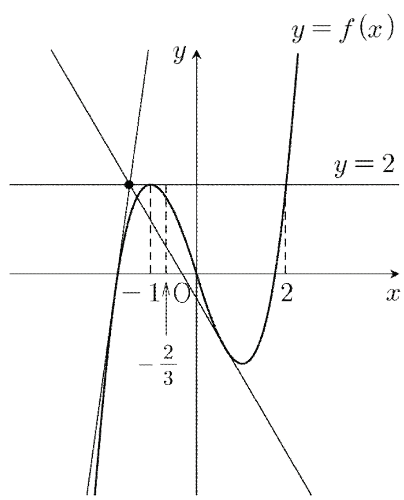
함수 $g(t)$가 불연속인 모든 실수 t의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 $\dfrac{1}{3}$

위의 풀이에서 -1, 2는 직선 $y=2$가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점의 x좌표이고, $-\dfrac{2}{3}$는 직선 $y=2$가 '곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선' 과 만나는 점이다. 이를 아래의 풀이에서 확인하자.

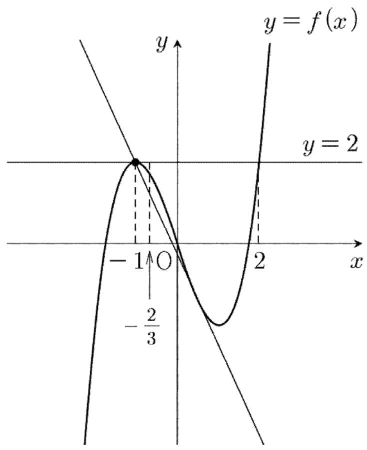
풀이2 기하적

t의 값을 변화시키면서, 실제로 접선을 그어보자.
(1) $t<-1$인 경우
점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



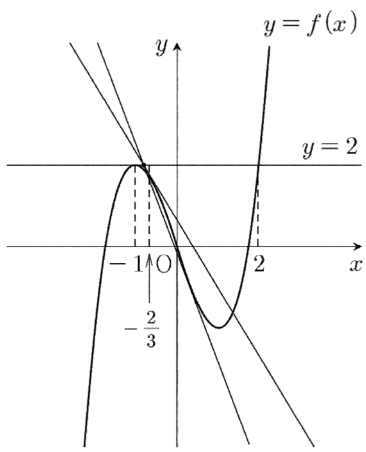
(2) $t=-1$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



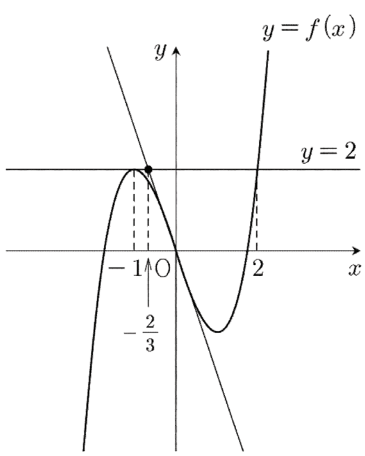
(3) $-1<t<-\dfrac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



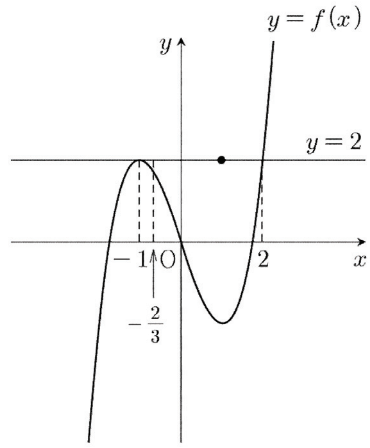
(4) $t=-\dfrac{2}{3}$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다. 이때, 원점을 지나는 직선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 변곡점에서의 접선이다.



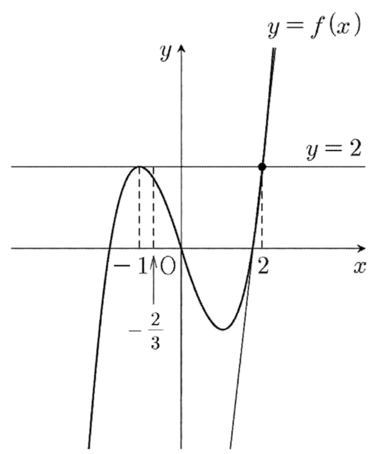
(5) $-\dfrac{2}{3}<t<2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 1개의 접선을 그을 수 있다.



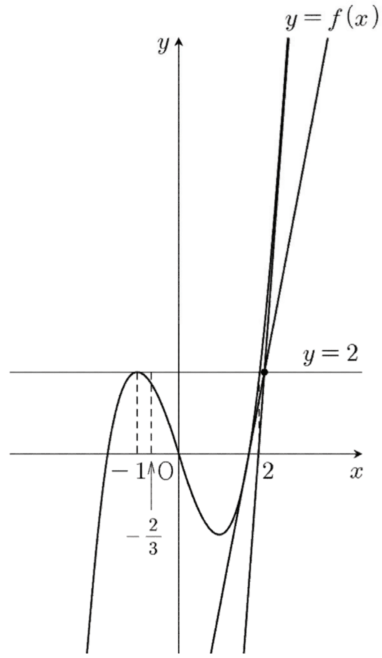
(6) $t=2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 2개의 접선을 그을 수 있다.



(7) $t>2$인 경우

점 $(t,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 3개의 접선을 그을 수 있다.



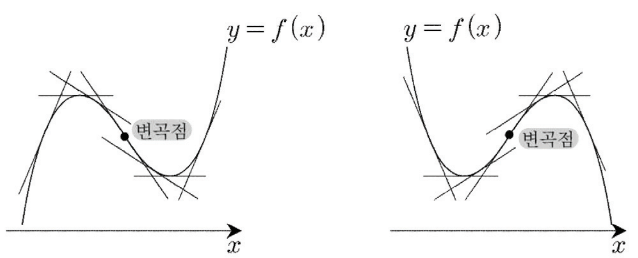
답 $\frac{1}{3}$

이 문제는 '대수적 풀이' 와 '기하적 관찰' 이 모두 가능하다. 전자의 경우 삼차방정식의 근의 분리와 이차방정식의 근의 분리가 적용된 풀이인데, 이는 수능에서 거의 매해 출제되는 전형적인 풀이에 해당하므로 반드시 익혀두어야 한다. 후자의 경우 t의 값을 변화시키면서 접선의 개수를 관찰하는 실전적인 풀이이다.

다음과 같은 관찰을 해보자.

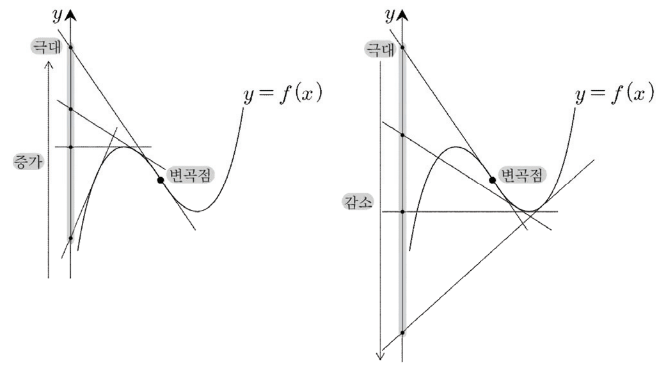
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최소가 된다. (아래 왼쪽 그림)

최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 기울기는 점 P가 변곡점 일 때 최대가 된다. (아래 오른쪽 그림)

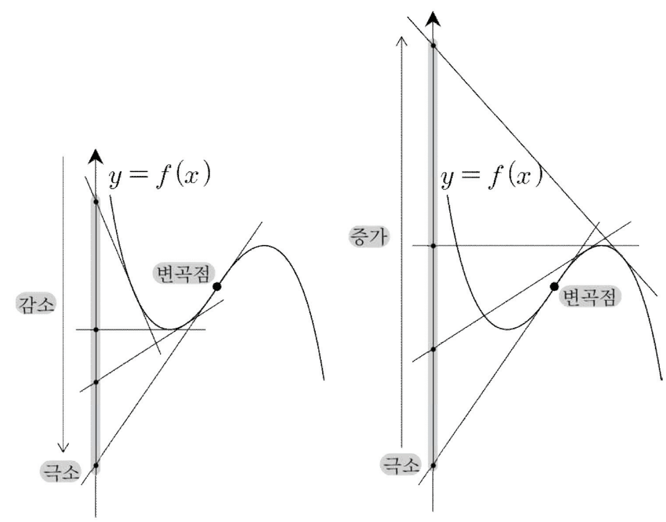


이제 다음의 관찰을 해보자.

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극댓값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)



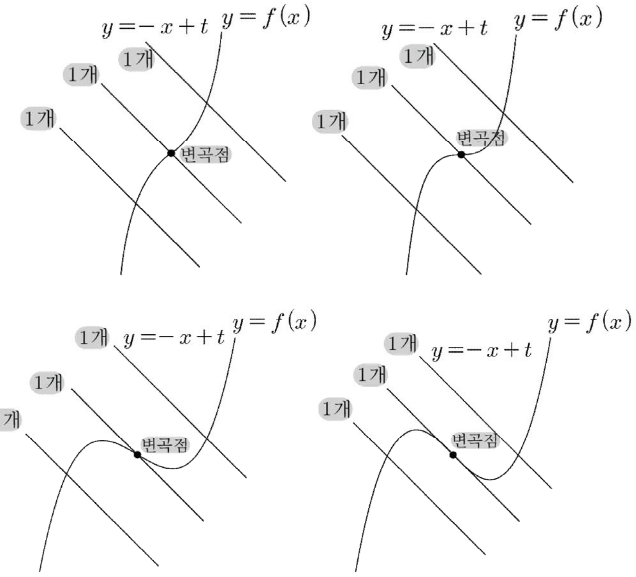
최고차항의 계수가 음수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 P에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$는 점 P가 변곡점일 때 극솟값을 갖는다.
(단, 곡선 $y=f(x)$와 y축의 위치 관계가 아래 그림과 같을 때로 한정하자.)



● **삼차함수와 직선의 위치 관계**

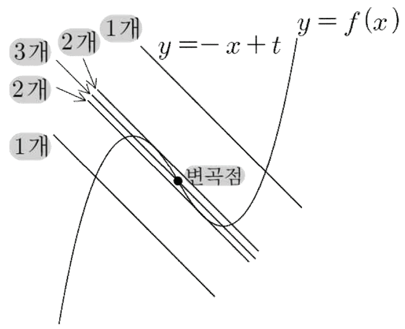
최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라고 할 때, 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속인 경우와 불연속인 경우를 구분해보자.

(1) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1 이상인 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(2) 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 기울기가 -1보다 작은 경우



위의 그림에서 알 수 있듯이 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 불연속이다. 이때, 불연속 점의 개수는 2이다.

E. 방정식 $f(f(x))=x$에 대한 연구

▶ 기출 문제 p.83

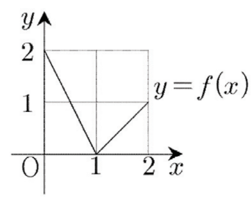
본 주제에 들어가기 전에 아래의 문제를 풀어보자.

예제 1

닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 정의된 함수

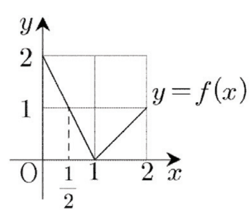
$$f(x)=\begin{cases}-2x+2 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1<x\le 2)\end{cases}$$

의 그래프는 아래 그림과 같다.



방정식 $f(x+f(x))=1$을 만족시키는 모든 해의 합을 구하시오.

풀이

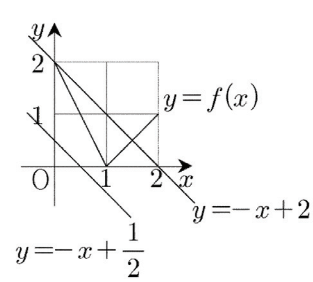


$f(\alpha)=1$을 풀면 $\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $\alpha=2$

문제에서 주어진 방정식은 다음과 필요충분조건이다.

$x+f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $x+f(x)=2$

즉, $f(x)=-x+\frac{1}{2}(\cdots㉠)$ 또는 $f(x)=-x+2(\cdots㉡)$



위의 그림에서 ㉠은 해를 갖지 않고,

㉡: $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

E128

●●● (2021(9)-나형30)

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$
(나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

E. 삼차함수의 그래프: 변곡접선

▶ 실전 이론 p.237

E129

○○○ (2011(9)-가형21)

함수 $f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax$에 대하여
곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 열린구간 $(0,\ 5)$에서 증가할 때, a의 최솟값을 구하시오. [3점]

E130

(2018(9)−나형20)

삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

E131

(2012−가형19)

실수 m에 대하여 점 $(0,\ 2)$를 지나고 기울기가 m인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$과 만나는 점의 개수를 $f(m)$이라 하자. 함수 $f(m)$이 구간 $(-\infty,\ a)$에서 연속이 되게 하는 실수 a의 최댓값은? [4점]

① -3 ② $-\frac{3}{4}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 6

E132

●●● (2013(6)−가형21)

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은? [4점]

① -14 ② -12 ③ -10 ④ -8 ⑤ -6

E133

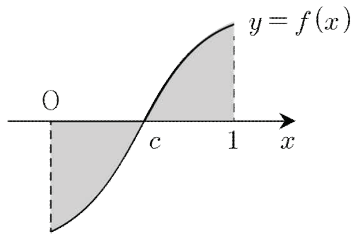
●●● (2013(9)−나형21)

좌표평면에서 두 함수

$$f(x)=6x^3-x,\ g(x)=|x-a|$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① $-\frac{11}{18}$ ② $-\frac{5}{9}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{7}{18}$

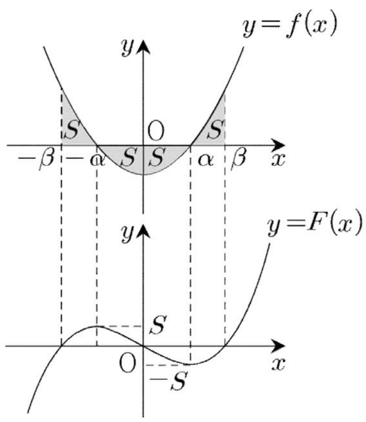


답 풀이 참조

참고

기하적인 관점에서 위의 그림을 재해석 하자. (귀류법)
구간 $[0,\ 1]$에서 연속함수 $f(x)$의 정적분 값은 0이므로 이 구간에서 함수 $f(x)$는 x축의 아래에만 있거나, x축의 위에만 있을 수 없다.(전자의 경우에 정적분의 값은 음$(-)$이고, 후자의 경우에 정적분의 값은 양$(+)$이다.) 따라서 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 x축과 적어도 하나 이상의 점에서 만나야 한다. 이 관점이 녹아든 문제는 수능에서도 빈번하게 출제되고 있으므로, 위의 상황을 반드시 눈과 손에 익혀 두도록 하자.

y축이 대칭축인 이차함수 $f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같다고 하자. (단, $F(x)=\int_0^x f(t)dt$)



(단, $F(\beta)=0,\ \beta=\sqrt{3}\alpha$)

위의 그림에서 다음의 등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\int_{-\beta}^{\beta} f(x)dx=0,$$

$$\int_{-\beta}^{0} f(x)dx=0,\ \int_{0}^{\beta} f(x)dx=0$$

$$\int_{-\beta}^{\alpha} f(x)dx=-S,\ \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx=-S$$

F. 정적분의 계산: 영역+절댓값

▶ 기출 문제 p.115

다음의 성질을 함께 증명해보자.

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$는 연속함수이다.
모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$
임을 이용하여, 부등식

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$$

가 성립함을 증명하시오.

이때, 등호가 성립할 조건은 다음과 같다.
$f(x)\ge 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)|=f(x))$
또는 $f(x)\le 0$ $(\Leftrightarrow |f(x)|=-f(x))$

증명

모든 실수 x에 대하여
$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|$
이므로

$$-\int_a^b |f(x)|dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b |f(x)|dx$$

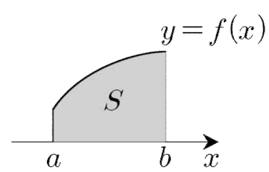
$$\therefore\ \left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$$

($\because$ 두 실수 $A,\ B$에 대하여
$-B\le A\le B$이면 $|A|\le B$이다.) ■

위의 성질을 그래프의 개형을 이용하여 재해석하자.

함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이다.

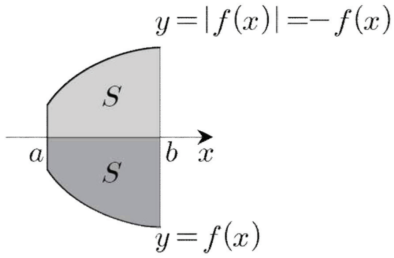
❶ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\ge 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \ (\because |S| = S)$$

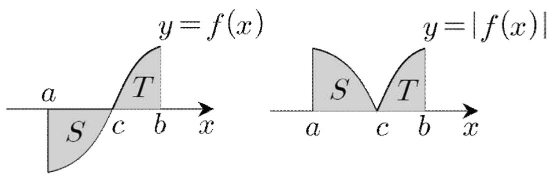
❷ 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x) \le 0$인 경우



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx \ (\because |-S| = S)$$

❸ 구간 $[a,\ c]$에서 $f(x) \le 0$이고,
구간 $[c,\ b]$에서 $f(x) \ge 0$인 경우
(단, $a < c < b$)



위의 그림에서

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |T-S|$$

$$\int_a^b |f(x)|dx = S+T$$

$S \ge T$이면 $|T-S| = S-T$이므로

$S+T-|T-S| = 2T \ge 0$

$S < T$이면 $|T-S| = T-S$이므로

$S+T-|T-S| = 2S \ge 0$

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

❶, ❷, ❸에 의하여 다음의 부등식이 항상 성립한다.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$$

F. 정적분의 계산: 평행이동, 대칭이동

▶ 기출 문제 p.116

평행이동의 관점을 적용하면 정적분의 계산이 간단해 지는 경우들이 있다. (미분법도 마찬가지이다. 수능에서는 평행이동의 관점을 적용하면 계산이 간단해지는 미분법, 적분법 문제가 즐겨 출제되고 있다.)

예제 1

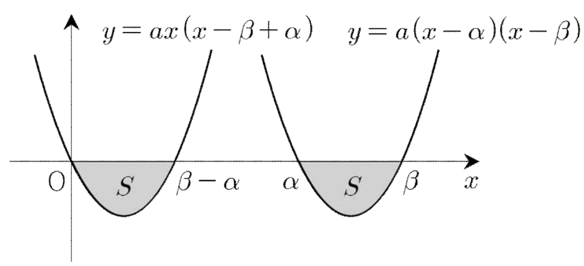
이차함수 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3 \ (\text{단, } \beta > \alpha)$$

이다. 위의 공식을 증명하여라.

증명

우선 $a>0$인 경우를 생각하자.



문제에서 주어진 곡선을 x축의 방향으로 $-\alpha$만큼 평행이동시키면 곡선

$y=ax(x-\beta+\alpha)$

와 일치한다.

(※ 평행이동을 한 이유는? 계산을 간단히 하기 위해서이다.)

이때, 문제에서 주어진 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 평행이동시킨 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 같다. 즉, 평행이동해도 도형의 넓이가 변하지 않는다.

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \int_0^{\beta-\alpha} ax(x-\beta+\alpha)dx$$

$$= \int_0^{\beta-\alpha} \{ax^2 + a(\alpha-\beta)x\}dx$$

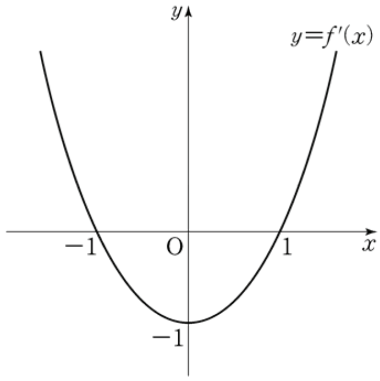
$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{a}{2}(\alpha-\beta)x^2\right]_0^{\beta-\alpha}$$

F. 정적분의 계산: 삼차함수(점대칭)

F044

○○ (2016(9)-A형14)

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 $f'(x)=x^2-1$이다.



$f(0)=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [4점]

① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

F. 정적분의 계산: 영역+절댓값

▶ 실전 이론 p.277

F045

●●● (2016-A형29)

이차함수 $f(x)$가 $f(0)=0$이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^2 \lvert f(x)\rvert dx=-\int_0^2 f(x)dx=4$
(나) $\int_2^3 \lvert f(x)\rvert dx=\int_2^3 f(x)dx$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

F046

●●● (2023(9)−확률과통계14/미적분14/기하14)

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)dx-\int_{0}^{1}|f(x)|dx$$

라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

F. 정적분의 계산: 평행이동, 대칭이동

▶ 실전 이론 p.278

F047

○○ (2006−가형20)

함수 $f(x)=x^3$의 그래프를 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동시켰더니 함수 $y=g(x)$의 그래프가 되었다. $g(0)=0$이고 $\int_{a}^{3a} g(x)dx-\int_{0}^{2a} f(x)dx=32$일 때, a^4의 값을 구하시오. [3점]

F048

○○ (2007(9)−가형8)

양수 a에 대하여 삼차함수 $f(x)=-x(x+a)(x-a)$의 극대점의 x좌표를 b라 하자.

$\int_{-b}^{a} f(x)dx=A$, $\int_{b}^{a+b} f(x-b)dx=B$일 때,

$\int_{-b}^{a} |f(x)|dx$의 값은? [3점]

① $-A+2B$　② $-2A+B$　③ $-A+B$
④ $A+B$　⑤ $A+2B$