4번 문항(2017학년도 한양대학교 논술기출)

$[0,\infty)$에서 정의되는 함수 $f(x)$가 다음과 같이 주어져 있다.

$$f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

함수 $f(x)$의 최댓값을 구하시오.

발상은 두가지이다. 답지대로 하느냐, 평소에 알던 지식들을 이용해서 푸느냐
먼저 평소에 알던 지식들을 이용해보자

첫 번째 발상

당연히, 최댓값을 구하려면 미분을 해야할 것이다. 하지만 함수의 지수에 또 함수가 들어가있는 형태의 미분이 기억나지 않는다면 반성하자. 양 변에 $\ln$을 취하고 미분해야 할 것이다.
(대표적으로 x^x꼴을 한번 생각해보자)
그래서 양 변에 $\ln$을 취해준다면
$\ln f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$이므로 이제 미분하기가 한결 수월해졌다
미분해본다면 아래와 같이 적힌다.

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$

($\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$을 그대로 미분해도 괜찮지만, $\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)=\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$꼴로 변형시켜 미분하는 것이 조금 더 간결해진다)

그런데, $f'(x)$의 꼴을 구해보아도 생각보다 간결하지 않다는 것을 알 수 있다.

$$f'(x)=f(x)\times\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\right]$$

이런꼴에서 우리는 이런의심을 한번 해볼 필요가 있다.
'한번에 도함수가 0이 되는 값을 구할 수 없다고? 그렇다면 혹시 항상 증가하거나 감소하는 상황은 아닐까?'
특히 이런상황은 논술에서 종종 등장하기에 기억해놓아야 하는 부분이다.
그렇다면 우리는 $f'(x)$의 부호부터 먼저 판단해볼 필요가 존재한다.

$$f'(x)=f(x)\times\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\right]$$

에서 $f(x)$는 주어진 구간에선 항상 양수이다. 그렇다면 $f'(x)$의 부호를 결정짓는 부분은

$$g(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$
$$=\frac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$

이므로 이 함수에 이름을 붙이고 미분해보자.(서술시 이름을 붙이는 것은 유용하다)

$g'(x) = -\frac{1}{2(x+1)^2} + \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x+1}{2(2x+1)(x+1)^2} > 0$

즉 주어진 범위에서 $g'(x) > 0$이므로 $g(x)$는 증가함수이다. 수능만 풀다보면 여기서 당황스러울 수 있다. 풀이의 단계가 더 길어졌기 때문이다.

일단 여기까지 도달하기 위한 사고과정과 그 결과를 정리해보자

① $f(x)$의 최대를 구하려면 극대를 의심해보아야하므로 $f'(x)$를 구해야겠다

② $f'(x)$를 구하기 힘드므로 양변에 $\ln$을 취하여 미분해봐야겠다

③ 미분해도 꼴이 복잡하고 $f'(x) = 0$의 근을 얻기가 힘들다. 따라서 도함수의 부호판단부터 해보자.

④ 주어진 범위에서 $f(x) > 0$이므로 $f'(x)$의 부호를 판단하려면 $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+2}\right\} + \ln(2x+1) - \ln(2x+2)$의 부호만 판단하면 되므로 이름을 붙이고 미분해보자.

⑤ $g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{2x+2}\right\} + \ln(2x+1) - \ln(2x+2)$이고 미분해보니 $g'(x) > 0$

즉, $f'(x)$의 부호를 결정짓는 $g(x)$가 항상 증가하는 상황이다.

함수가 항상 증가한다면 이 함수의 부호가 항상 양수인지 음수인지, 특히 논술에선 관찰해 볼 필요가 존재한다. 이를 판단하기 위해선 구간의 시작값과 점근선을 구해보면 된다.

$g(0) = \frac{1}{2} - \ln 2 < 0$,

(위의 사실을 판단하는 좋은 방법은 결과를 미리 먼저 생각해본 후, $\frac{1}{2} - \ln 2 > 0$이라 가정해보는 것이다. 그리고 로그는 판단하는데 방해되므로 다시 지수로 변환시켜주면 $e^{\frac{1}{2}} > 2$

그리고 둘 다 양수이므로 양 변을 제곱하여도 부등식의 방향은 변하지 않는다

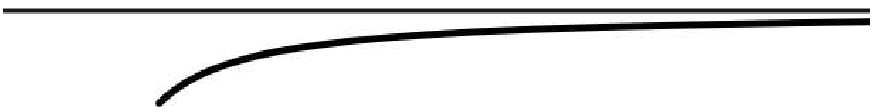
$e > 4$이므로 모순이다. 따라서 $\frac{1}{2} - \ln 2 < 0$)

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2(x+1)} + \ln(2x+1) - \ln(2x+2)\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2(x+1)} + \ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)\right\} = 0$$

이다.

함숫값이 점점 증가하는데 맨 처음에 음수이고 0으로 가므로 주어진 범위에서 $g(x) < 0$이다

즉, $f'(x) < 0$의 결과를 얻을 수 있다.



(대충 이런느낌)

항상 감소하는 함수이므로 $f(0)$이 최댓값이고 $f(0)=e^{\frac{1}{2}}$이 최대이다.

두 번째 발상

답지에 있는 발상이다. 항상 발상적인 부분은 내 능력 밖이다 라는 부정적인 인식보단, 이럴수도 있구나 하고 내걸로 만들어서 써먹어야지 라는 긍정적인 인식을 가지는 것이 도움이 된다.
첫 번째 발상에서 언급한 $g(x)$를 가져오자.

$g(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$인데 항상 동일한 함수를 베이스로 서로 다른 내용물이 빠지고 있다면 정적분으로 연상지어보는것도 괜찮은 발상이다

(예를 들어 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 $F(a)-F(b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$)

(차후 평균값 정리와 샌드위치 정리에 도움이 되는 발상이다)

$g(x)=\dfrac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)=\dfrac{1}{2(x+1)}-\displaystyle\int_{2x+1}^{2x+2}\dfrac{1}{t}\,dt$

이고 주어진 범위에서 $\dfrac{1}{2(x+1)}>0$이고 $0<2x+1<2x+2$이며 $\dfrac{1}{t}$는 $t>0$에서 $\dfrac{1}{t}>0$

다 문제없을 줄 알았더니, 서로 더하는꼴이 아닌 빼는꼴이기에 부호판단이 어렵다. 따라서 비교를 편하게 하기 위해 $\dfrac{1}{2(x+1)}$도 적분범위 안으로 집어넣어주는 것이 나을 것이다.

$\dfrac{1}{2(x+1)}-\displaystyle\int_{2x+1}^{2x+2}\dfrac{1}{t}\,dt=\int_{2x+1}^{2x+2}\left(\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{t}\right)dt$ (함수를 조작하는 것은 어렵고, 구간의길이는 1이니 그냥 상수취급하게 넣어주는것도 하나의 방법이다.)

그렇다면 이제 구간 $[2x+1, 2x+2]$에서

$\dfrac{1}{2(x+1)}-\dfrac{1}{t}$의 부호를 판단하다.

$\dfrac{1}{t}$는 구간 $[2x+1, 2x+2]$에서 항상 감소하는 함수이므로 구간 끝에 해당하는 함숫값보다는 항상 클 수 밖에 없다.

따라서

$\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{t} \leq 0$이고

정적분 시 $g(x) \leq 0$이고 $a < b$이면 $\int_a^b g(x)dx \leq 0$이므로

$$\int_{2x+1}^{2x+2} \left(\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{t} \right) dt \leq 0$$

따라서 $f'(x) \leq 0$이 얻어지고 이 이후는 첫 번째 풀이와 동일하다.

4번 문항 해설

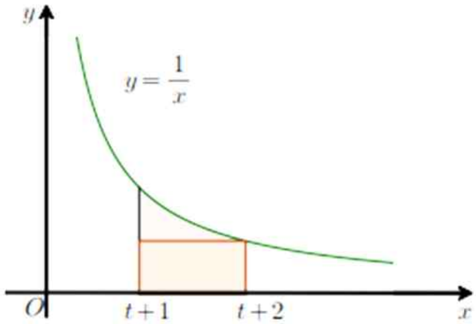
정답 : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

양의 실수 t에 대하여

$$\frac{1}{t+2}+\ln(t+1)-\ln(t+2)=\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx$$

이다. 이때 함수 $\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}$는 구간 $[t+1,\ t+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에

적분값은 0보다 작다. 즉 $\int_{t+1}^{t+2}\left(\frac{1}{t+2}-\frac{1}{x}\right)dx<0$이다.



함수 $f(x)=\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)^{x+\frac{1}{2}}$의 양변에 로그를 취하면,

$$\ln f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\ln(2x+1)-\ln(2x+2)\}$$

이다. 양변을 미분하면,

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{2}{2x+1}-\frac{2}{2x+2}\right\}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$

$$=\frac{1}{2(x+1)}+\ln(2x+1)-\ln(2x+2)$$

$$=\int_{2x+1}^{2x+2}\left(\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{t}\right)dt$$

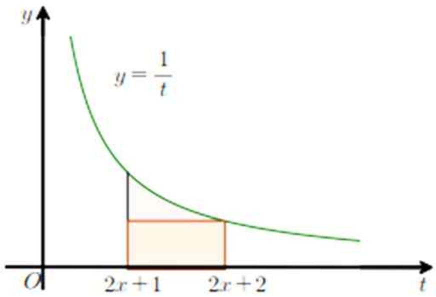
위의 식에서 피적분 함수 $h(t)=\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{t}$는

구간 $[2x+1,\ 2x+2]$에서 0보다 작거나 같기 때문에,

$\frac{f'(x)}{f(x)}<0$을 얻는다. 그리고 실수 $x\geq 0$에 대하여 $f(x)>0$이므로,

$f'(x)<0$이다. 즉 $f(x)$는 감소함수이다.

따라서 $f(x)\leq f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로, 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.



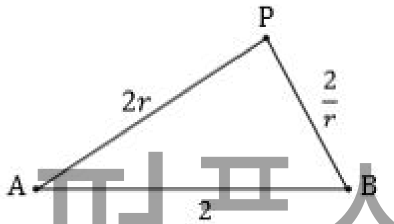
15번 문항 (2020 한양대 논술기출)

평면 위에 $\overline{AB}=2$인 점 A와 점 B가 있다. $\overline{AP}\times\overline{BP}=4$를 만족하는 평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

최대, 최솟값을 구하라 하니까 당연히 식을 세워야 할 것이고 미지수가 필요할 것이다. 그럼 아마 $\overline{AP}$와 $\overline{BP}$를 미지수로 잡겠지? 그리고 미분이 필수겠지만 벌써 합도 보이고 곱도 있고 변의 길이는 항상 양수니까 산술기하도 떠오를 것이다. 오케이 그런데 최소는 어떻게 구하지.? 처음 보자마자 풀이가 떠오르지 않을 수도 있으니 먼저 식세워보자.

$$\overline{AP}=2r,\ \overline{BP}=\frac{2}{r}\ (r>0)$$

자, 여기까진 아마 납득이 갈 것이다(물론 서로 역수관계가 아니라 별개의 미지수로 잡고 나중에 $\overline{AP}\times\overline{BP}=4$를 이용하여 한 미지수로 변형시킬수도 있고)



세 점 A, B, P는 삼각형의 세 꼭짓점이거나 일직선 위에 있으므로

여기서 왜 뜬금없이 삼각형이 나왔나 생각해보자.
아까 미지수를 잡았으니 이 미지수에 대한 정보가 필요할것인다. 그런데 이걸가지고 식을 세워보게 되면 $\overline{AP}+\overline{BP}=2r+\frac{2}{r}(r>0)$이다. 이 함수를 그려보면 알겠지만 $r\to0+$, $r\to\infty$ 둘 다 양의 무한대로 발산한다. 즉 최댓값이 안나온다. r에 대한 범위가 추가로 필요하다는 것을 알 수 있다. 그렇다고 이걸 좌표평면에서 각각 미지수로 잡고 좌표로 잡으면 더 답이 없어진다는 것을 알 수 있다. (예를 들어 $A(0,0)$, $B(2,0)$, $P(a,b)$ 라고 하였을 때 계산이 터져나가는 것을 관찰가능하다!)
그래서 발상이 이렇게 흘러가는 것이 낫다.

① 음..좌표로 잡아보니 답이 없네.?
② 선분의 길이.. 선분의 길이에 관해서 괜찮게 떠올릴만한 상황이 뭐가 있을까?
③ 아! 길이는 결국 양수고, 그렇다면 도형에 빗대어서 생각해보면 어떨까? 3점이니까 삼각형으로. 그렇다면 삼각형은 한 변의 길이가 나머지 두 변의 길이의 합보다 작아야겠구나! 라는 것을 떠올릴 수 있으니까 조건을 추가로 얻을 수 있겠다.

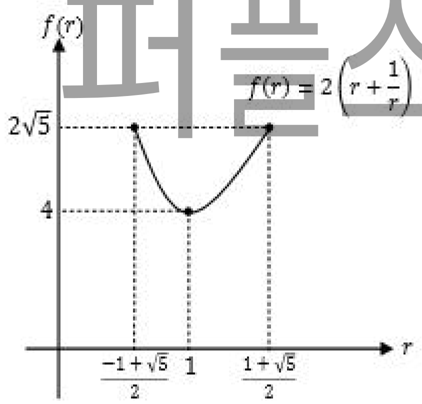
그래서 위와 같은 삼각형이 탄생하는것이고, 조건이 아래와 같이 얻어지는것이다

$2r+\dfrac{2}{r}\ge 2$, $2r+2\ge\dfrac{2}{r}$, $2+\dfrac{2}{r}\ge 2r$이 성립한다. 이로부터 $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\le r\le\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$이 성립한다.

그렇다면 범위도 얻어졌으니.. 이제 최대값을 마저 구해야겠지?
미분도 하고 증감표도 구하고 계산해주면 끝이겠다~

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=2\left(\mathrm{r}+\dfrac{1}{\mathrm{r}}\right)=\mathrm{f}(\mathrm{r})$이라 하면, $f'(r)=2\left(1-\dfrac{1}{r^2}\right)$이므로 다음의 변화표와 $f(r)$의 그래프로부터 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)=f\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=2\sqrt{5}$이고, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $f(1)=4$이다.

r	$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$2\sqrt{5}$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$



(참고 : $\overline{\mathrm{AP}}=\mathrm{r}$, $\overline{\mathrm{BP}}=\dfrac{4}{\mathrm{r}}$라 두면 $(r>0)$, $-1+\sqrt{5}\le r\le 1+\sqrt{5}$이 성립한다. $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\mathrm{r}+\dfrac{4}{\mathrm{r}}=\mathrm{g}(\mathrm{r})$라 하면 역시 동일한 결과를 얻을 수 있다.)

여기서 얻어가야 할 발상은, 길이에 관해서 조건이 주어졌고 미지수에 대한 정보가 필요하다면 도형을 한번쯤 떠올리는 것이 좋다! 라는 발상일 것이다. (+ 증감표가 필요없는 대학도 있으나 평소에는 증감표를 그려보는 것이 논술연습에는 항상 도움이 된다)