

문항 3 고려대학교 2014학년도 인문 A

④

‘빈 섬’에는 12명의 농민이 살고 있다. 전체 농민의  $\frac{1}{3}$ 은 각각 2필지의 논을 소유하고 있고,  $\frac{2}{3}$ 은 각각 1필지의 논을 소유하고 있다. 전체 논의  $\frac{1}{2}$ 은 비옥하며, 나머지  $\frac{1}{2}$ 은 비옥하지 않다. 비옥한 논에서는 한 해에 필지 당 10단위의 쌀이 생산되지만, 비옥하지 않은 논에서는 한 해에 필지 당 6단위의 쌀이 생산된다.

‘빈 섬’의 농민들은 자기가 소유한 논의 필지 수와 비옥도에 따라 다음과 같이 5가지 유형으로 나누어진다.

농민 유형	농민 수	필지 수	비옥도
I	1	2	둘 다 비옥함
II	2	2	둘 중 하나만 비옥함
III	1	2	둘 다 비옥하지 않음
IV	4	1	비옥함
V	4	1	비옥하지 않음

‘빈 섬’에서 한 농민이 내야 할 세금이 자신의 연간 쌀 생산량보다 적거나 같은 경우에는 경작을 해서 세금을 내고, 많으면 자신이 소유한 모든 논의 경작을 미리 포기함으로써 세금을 내지 않는다. 따라서 한 농민이 내야 할 세금이 6단위라면 모든 유형의 농민이 경작을 해서 세금을 내지만, 세금이 더 많아지면 세금을 내는 농민 유형의 수는 감소할 수 있다.

세금을 부과하는 데 다음의 세 가지 방식을 고려해 볼 수 있다.

- ㉠ 각 농민 당 세금 S를 부과한다.
  - ㉡ 각 필지 당 세금 T를 부과한다.
  - ㉢ 비옥한 논에는 필지 당 세금 X를, 비옥하지 않은 논에는 필지 당 세금 Y를 부과한다.
- ㉣ S, T, X, Y 각각은 양의 실수이고, 조세 수입은 농민들이 낸 세금의 총합이다.

III. ④를 읽고 다음의 문제에 답하시오. (25 점)

1. ㉠의 방식을 사용할 경우, 농민 당 세금 S가 얼마일 때 이 섬의 조세 수입이 가장 크게 되는가? 이 때 각 유형별로 농민 당 세후 쌀 보유량을 구하시오.
2. ㉡의 방식을 사용할 경우, 필지 당 세금 T가 얼마일 때 이 섬의 조세 수입이 가장 크게 되는가? 이 때 각 유형별로 농민 당 세후 쌀 보유량을 구하시오. 농민들의 세후 쌀 보유량 분포라는 관점에서 ㉠의 분산과 ㉡의 분산을 비교하시오.
3. 농민들은 자기 필지의 비옥도를 자신만 알고 있다. ㉢의 방식을 사용할 경우, 농민들은 자기 필지의 비옥도를 사실대로 보고할 수도 있고 거짓으로 보고할 수도 있다. 사실대로 보고할 때의 세후 쌀 보유량이 거짓으로 보고할 때의 세후 쌀 보유량보다 크거나 같다면 농민은 사실대로 보고한다. 단, 각 필지 당 필지의 비옥도에 대해 거짓으로 보고하면 거짓말에 따르는 비용으로 생산이 1단위만큼 줄어든다. 모든 농민들이 자기 필지의 비옥도를 사실대로 보고하게 만드는 세금 X와 Y 중 이 섬의 조세 수입을 가장 크게 하는 X와 Y의 값은 무엇인가? ㉠의 최대 조세 수입과 ㉢의 최대 조세 수입을 비교하시오.

## 경우의 수 활용

생각의 Process

- ㉞의 방식을 사용할 경우, 농민 당 세금 S가 얼마일 때 이 섬의 조세 수입이 가장 크게 되는가? 이 때 각 유형별로 농민 당 세후 쌀 보유량을 구하시오.

### 1) 요구사항 정리

- 전체 조세 수입을 최대화하는 농민 당 세금 S의 값을 구하라.
- 세후 쌀 보유량을 구하라. - [주의] “세후”

### 2) 조건과 전제에 대한 정리

- 농민의 총 수 = 12명 /

비옥한 땅의 생산량 = 10, 비옥하지 않은 땅의 생산량 = 6

농민 유형	농민 수	필지 수	비옥도
I	1	2	둘 다 비옥함
II	2	2	둘 중 하나만 비옥함
III	1	2	둘 다 비옥하지 않음
IV	4	1	비옥함
V	4	1	비옥하지 않음

- 조세 수입이 S만큼 발생할 조건 : 생산량  $\geq S$  일 경우 경작하여 세금을 납부  
(생산량보다 S가 클 경우 경작을 포기하므로, 조세수입이 0만큼 발생)

### 3) 수식화 및 풀이과정

- 농민 1인당 생산량을 정리해 보면 다음 표와 같다.

- [주의] 소유한 토지의 비옥도에 따라 정확히 계산해 두어야 한다.

농민 유형	농민 수	필지 수	농민 1인당 생산량
I	1	2	20
II	2	2	16
III	1	2	12
IV	4	1	10
V	4	1	6

2. S값의 변화에 따른 전체 조세수입의 변화를 살펴 본다. 1인당 생산량이 가장 적은 V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기하지 않을 수 있는 최대치인  $S = 6$  지점부터 살펴 보면 된다.

- [주의] ㉞의 방식에서, 세금은 농지의 필지 수에 비례하여 부과되는 것이 아니라, 농민 1인당 S만큼 부과됨에 유의해야 한다. 실제 많은 학생들이 이 조건에 대해 혼동하여, 정확한 계산을 하지 못하였다.

S = 6일 경우 : 모든 농민이 경작을 포기하지 않음 (납세 농민 수 : 12)

$$\therefore \text{전체 조세 수입} = S \times \text{납세 농민수} = 6 \times 12 = 72$$

S = 7일 경우 : V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 농민 수 : 8)

$$\therefore \text{전체 조세 수입} = 7 \times 8 = 56$$

S = 8일 경우 : V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 농민 수 : 8)

$$\therefore \text{전체 조세 수입} = 8 \times 8 = 64$$

S = 9일 경우 : V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 농민 수 : 8)

$$\therefore \text{전체 조세 수입} = 9 \times 8 = 72$$

S = 10일 경우 : V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 농민 수 : 8)

$$\therefore \text{전체 조세 수입} = 10 \times 8 = 80$$

S = 11일 경우 : IV 유형과 V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 농민 수 : 4)

$$\therefore \text{전체 조세 수입} = 11 \times 4 = 44$$

S의 값이 10을 초과하게 될 경우, 경작을 포기하는 농민의 수가 증가함에 따라 전체 조세 수입이 감소하는 모습을 확인할 수 있다. 따라서 조세 수입을 최대화하는 S 값은 10이 된다.

3. S의 값이 10일 때, 세후 쌀 보유량을 구하면 다음과 같다.

농민 유형	농민 1인당 생산량 (P)	농민 1인당 세금 (S)	세후 쌀 보유량 (P-S)+
I	20	10	10
II	16	10	6
III	12	10	2
IV	10	10	0
V	6	10	0 (경작 포기)

## 경우의 수 활용

생각의 Process

2. ㉑의 방식을 사용할 경우, 필지 당 세금 T가 얼마일 때 이 섬의 조세 수입이 가장 크게 되는가? 이 때 각 유형별로 농민 당 세후 쌀 보유량을 구하시오. 농민들의 세후 쌀 보유량 분포라는 관점에서 ㉑의 분산과 ㉒의 분산을 비교하시오.

### 1) 요구사항 정리

1. 전체 조세 수입을 최대화하는 필지 당 세금 T의 값을 구하라.
2. 세후 쌀 보유량을 구하라. - [주의] “세후”
3. ㉑의 방식과 ㉒의 방식 하에서 세후 쌀 보유량의 분산을 구하고, 비교하라.

### 2) 조건과 전제에 대한 정리

1. 농지 총 필지 수 : 16
2. 조세 수입이 필지 당 T 만큼 발생할 조건 : 총 생산량  $\geq T \times$  필지 수 일 경우 경작하여 세금을 납부 (생산량보다 “ $T \times$  필지 수” 가 클 경우 경작을 포기하므로, 조세수입이 0만큼 발생)

### 3) 수식화 및 풀이과정

1. 필지당 T의 세금을 부과하게 될 경우, 조세 수입을 T에 대해 표현하면 다음과 같다.

농민 유형	농민 수	총 수확량	필지 수	조세 금액
I	1	20	2	2T
II	2	16	2	4T
III	1	12	2	2T
IV	4	10	1	4T
V	4	6	1	4T

2. T값의 변화에 따른 전체 조세수입의 변화를 살펴 본다. 필지당 생산량이 가장 적은 III 유형과 V 유형에 속하는 농민이 경작을 포기하지 않을 수 있는 최대치인  $T = 6$  지점부터 살펴 보면 된다.

$T = 6$ 일 경우 : 모든 농민이 경작을 포기하지 않음 (납세 대상 필지 수 : 16)

농민 유형	농민 수	농민 당 수확량	필지 수	농민 당 세액
I	1	20	2	12
II	2	16	2	12
III	1	12	2	12
IV	4	10	1	6
V	4	6	1	6

$\therefore$  전체 조세 수입 =  $T \times$  납세 대상 필지 수 =  $6 \times 16 = 96$

T = 7일 경우 : III 유형과 V유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 대상 필지 수 : 10)

농민 유형	농민 수	농민 당 수확량	필지 수	농민 당 세액
I	1	20	2	14
II	2	16	2	14
III	1	12	2	14
IV	4	10	1	7
V	4	6	1	7

- III 유형의 경우 경작량이 12인데 조세 금액은 14가 됨

- V 유형의 경우 경작량이 6인데 조세 금액은 7이 됨

∴ 전체 조세 수입 =  $7 \times 10 = 70$

T = 8일 경우 : III 유형과 V유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 대상 필지 수 : 11)

농민 유형	농민 수	농민 당 수확량	필지 수	농민 당 세액
I	1	20	2	16
II	2	16	2	16
III	1	12	2	16
IV	4	10	1	8
V	4	6	1	8

- III 유형의 경우 경작량이 12인데 조세 금액은 16이 됨

- V 유형의 경우 경작량이 6인데 조세 금액은 8이 됨

∴ 전체 조세 수입 =  $8 \times 10 = 80$

T = 9일 경우 : II, III, V유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 대상 필지 수 : 6)

농민 유형	농민 수	농민 당 수확량	필지 수	농민 당 세액
I	1	20	2	18
II	2	16	2	18
III	1	12	2	18
IV	4	10	1	9
V	4	6	1	9

- II 유형의 경우 경작량이 16인데 조세 금액은 18이 됨

- III 유형의 경우 경작량이 12인데 조세 금액은 18이 됨

- V 유형의 경우 경작량이 6인데 조세 금액은 9가 됨

∴ 전체 조세 수입 =  $9 \times 6 = 54$

## 경우의 수 활용

T = 10일 경우 : II, III, V유형에 속하는 농민이 경작을 포기함 (납세 대상 필지 수 : 6)

농민 유형	농민 수	농민 당 수확량	필지 수	농민 당 세액
I	1	20	2	20
II	2	16	2	20
III	1	12	2	20
IV	4	10	1	10
V	4	6	1	10

- II 유형의 경우 경작량이 16인데 조세 금액은 20이 됨
  - III 유형의 경우 경작량이 12인데 조세 금액은 20이 됨
  - V 유형의 경우 경작량이 6인데 조세 금액은 10이 됨
- ∴ 전체 조세 수입 =  $10 \times 6 = 60$

T = 11일 경우 : 모든 농민이 경작을 포기함 (납세 농민 수 : 0)

농민 유형	농민 수	농민 당 수확량	필지 수	농민 당 세액
I	1	20	2	22
II	2	16	2	20
III	1	12	2	20
IV	4	10	1	11
V	4	6	1	10

∴ 전체 조세 수입 =  $11 \times 0 = 0$

T의 값이 10을 초과하게 될 경우, 조세 수입은 0이 된다.

T가 6일 때, 조세 수입은 96으로 최대를 이룬다.

3. T의 값이 6일 때, 세후 쌀 보유량을 구하면 다음과 같다. - (나)의 방식에서 세후 쌀 보유량

농민 유형	농민 1인당 생산량 (P)	농민 1인당 세금 (필지 수 × T)	세후 쌀 보유량 (P - 필지 수 × T)
I	20	12	8
II	16	12	4
III	12	12	0
IV	10	6	4
V	6	6	0

앞서 구한 (가)의 방식에서의 세후 쌀 보유량은 다음과 같다.

농민 유형	농민 1인당 생산량 (P)	농민 1인당 세금 (S)	세후 쌀 보유량 (P-S)+
I	20	10	10
II	16	10	6
III	12	10	2
IV	10	10	0
V	6	10	0 (경작 포기)

㉔의 세후 쌀 보유량 분포의 분산을  $V(s)$ 라 하면

$$V(s) = \frac{10^2 \times 1 + 6^2 \times 2 + 2^2 \times 1 + 0^2 \times 4 \times 2}{12} - \left(\frac{10 + 6 \times 2 + 2}{12}\right)^2 = \frac{32}{3}$$

㉕의 세후 쌀 보유량 분포의 분산을  $V(t)$ 라 하면

$$V(t) = \frac{8^2 \times 1 + 4^2 \times 2 + 4^2 \times 4}{12} - \left(\frac{8 + 4 \times 2 + 4 \times 4}{12}\right)^2 = \frac{56}{9}$$

㉔의 분포보다 ㉕의 분포가 더 크다.

예시답안

1. 비옥한 토지는 10을, 비옥하지 않은 토지는 6을 생산한다. ㉔에 제시된 표를 참고하여 총 생산량을 알아보면 아래와 같다.

농민 유형	농민 수	필지 수	총 생산량
I	1	2	20
II	2	2	16
III	1	2	12
IV	4	1	10
V	4	1	6

㉔는 농민 당 세금을 부과하는 방식이다. 그리고 각 농민은 세금이 생산량보다 높을 때 경작을 포기하고 그렇지 않을 경우에만 세금을 납부한다.

농민 당 세금이 6일 경우 모두 생산량이 6보다 높기 때문에 모두가 세금을 낸다. 이 때, 조세 수입은  $6 \times 12 = 72$ 이다.

농민 당 세금이 7, 8, 9, 10일 경우 농민 유형 V만 생산량이 이것보다 적으므로 경작을 포기한다. 이 때 조세 수입은 세금이 10일 경우 가장 크다. 이때의 조세 수입은  $10 \times 8 = 80$ 이다.

농민 당 세금이 11 이상이 되면 농민 유형 IV 또한 경작을 포기하게 되므로 조세 수입은 감소하게 된다. 즉 농민 당 세금이 10일 때 조세 수입은 80으로 가장 크다. 이 때, 농민 유형 별 세후 쌀 보유량은 아래와 같다.

농민 유형	세후 쌀 보유량
I	10
II	6
III	2
IV	0
V	0 (경작 포기)

## 경우의 수 활용

2. ㉔의 방식은 필지 당 세금을 부과하는 방식이다. 전체 16필지 중 8필지는 비옥하고 8필지는 비옥하지 않다. 그러므로 필지 당 1에서 6씩 세금을 부과할 때 모든 필지 당 세금이 납부가 된다. 이 때 최대 조세 수입은  $6 \times 16 = 96$ 이다. 만약 필지 당 세금이 7이상 10이하라면 비옥하지 않은 토지에 대한 세금은 부과될 수 없으므로 조세 수입이 96보다 작다. 필지 당 세금이 11 이상이라면 조세 수입은 0이 된다. 즉, 필지 당 세금이 6일 때 가장 조세 수입이 크다. 이 때, 농민들의 세후 쌀 보유량을 살펴보면 아래와 같다.

농민 유형	세후 쌀 보유량
I	8
II	4
III	0
IV	4
V	0

분산은 편차 제곱의 평균으로 평균값으로부터 값들이 멀리 분포되어있을수록 크다. 이 때, ㉔의 값은 평균이 ㉔의 평균에 비해 밀집되어 있다. 그러므로 ㉔의 분산이 ㉔의 분산보다 작다.



## 생각의 Process

3. 농민들은 자기 필지의 비옥도를 자신만 알고 있다. ㉠의 방식을 사용할 경우, 농민들은 자기 필지의 비옥도를 사실대로 보고할 수도 있고 거짓으로 보고할 수도 있다. 사실대로 보고할 때의 세후 쌀 보유량이 거짓으로 보고할 때의 세후 쌀 보유량보다 크거나 같다면 농민은 사실대로 보고한다. 단, 각 필지 당 필지의 비옥도에 대해 거짓으로 보고하면 거짓말에 따르는 비용으로 생산이 1단위만큼 줄어든다. 모든 농민들이 자기 필지의 비옥도를 사실대로 보고하게 만드는 세금 X와 Y 중 이 섬의 조세 수입을 가장 크게 하는 X와 Y의 값은 무엇인가? ㉠의 최대 조세 수입과 ㉡의 최대 조세 수입을 비교하시오.

## 1) 요구사항 정리

- 농민들이 비옥도를 사실대로 보고하게 하는 X의 값과 Y의 값을 구하라
- ㉠의 최대 조세 수입과 ㉡의 최대 조세 수입을 비교하라

## 2) 조건과 전제에 대한 정리

- 자기 필지의 비옥도는 농민 자신만 알고 있다.
- 세후 쌀 보유량을 비교하여, 농민들은 사실대로 보고할지 여부를 결정한다.
- 거짓으로 보고하는 데에는 비용이 1단위만큼 소요된다.

## 3) 수식화 및 풀이과정

## [계약조건 정리]

전체 토지는 16필지이고, 그 중 비옥한 토지는 8필지, 비옥하지 않은 토지도 8필지이다.

비옥한 토지에 X만큼, 비옥하지 않은 토지에 Y만큼 조세를 부과하게 되면, 전체 조세 수입은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$K = 8X + 8Y$$

조세수입을 극대화하기 위해서는, 농민들이 수확을 포기하지 않게 하는 것이 유리하므로 부과할 수 있는 조세의 크기는 각 토지의 생산량을 넘지 않아야 한다.

비옥한 토지에서는 쌀이 10단위, 비옥하지 않은 토지에서는 6단위 생산되므로

$$\therefore 0 \leq X \leq 10, 0 \leq Y \leq 6$$

## [Y의 결정]

농민이 거짓말을 하는 이유는, 세금을 적게 내기 위한 것이므로, 비옥하지 않은 토지를 가진 농민이 자신의 토지가 비옥하다고 거짓말할 경제적 유인은 발생하지 않는다. 또한, 비옥하지 않은 토지에서는 쌀 6단위만 생산되기 때문에 6을 초과하는 조세를 부과하게 되면 농민들은 경작을 포기하게 된다.

따라서 비옥하지 않은 토지에 부과할 수 있는 최대의 Y = 6이 된다.

이제 전체 조세 수입  $K = 8X + 48$ 이 된다.

## 경우의 수 활용

[X의 결정]

비옥한 토지를 가진 이들은 자기 필지의 비옥도를 거짓으로 보고함으로써 이득을 챙길 수 있다.  
이 때, 비옥한 토지를 가진 이들이 챙길 수 있는 이득의 크기는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} & \text{사실대로 보고했을 때의 조세 - 거짓으로 보고했을 때의 조세 - 거짓 보고에 드는 비용} \\ & = X - 6 - 1 = X - 7 \end{aligned}$$

위 이득이 0보다 크게 되면, 비옥한 토지를 가진 이들에게는 항상 거짓으로 보고할 경제적 유인이 생기므로, 이를 방지함과 동시에 조세수입을 최대화할 수 있는 조세 X의 크기는 7임을 알 수 있다.

따라서 이 경우의 조세 수입  $K = 56 + 48 = 104$  단위가 되며, ㉔의 방식에 따른 최대 조세수입인 96단위보다 8단위 더 많다. 차별적 조세 제도가 효과를 거둔다는 점을 확인할 수 있는 것이다.

별해

부등식의 영역을 활용한 풀이도 가능하다. 이 경우, 농민들이 거짓으로 보고하여 얻게 되는 이득을 활용해 추가적인 제약식을 얻고, 조건을 활용하여 좌표평면 위의 범위를 한정된 후,  $K = 8X + 8Y$ 의 그래프가 이동하는 범위에서 K의 최댓값을 찾아도 같은 답을 얻을 수 있다.