적분 정리 for Calculus

1. 적분 기본 형태

- 치환적분

무지성으로 치환하는 것은 지양한다. $\frac{dx}{dt}$에 해당하는 f'을 미리 찾아 ff'을 적분하려고 해야 한다.

ex 1. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ -> $\frac{1}{2}(\ln x)^2$

ex 2. $\int \tan^2 x \sec^2 x \, dx$ -> $\frac{1}{3}(\tan x)^3$

- 삼각함수

배각 반각 공식과 '$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$'을 잘 활용해야 한다.

ex 3. $\int \sin^2 x \, dx$ -> $\int \frac{1-\cos 2x}{2} dx$

ex 4. $\int \tan^2 x \, dx$ -> $\int (\sec^2 x - 1) \, dx$

- 부분적분

역시나 무지성으로 부분적분 공식에 넣는 것은 지양한다. 부분적분의 파생 원리를 생각하자.

$fg = \int (f'g + fg')dx = \int f'g \, dx + \int fg' \, dx \quad \therefore \int f'g \, dx = fg - \int fg' \, dx$ _ 부분적분

그러므로 $f'g$ 형태를 보고 그 모태인 fg를 생각해주어야 한다.

ex 5. $\int x\cos x \, dx$ _ 모태가 $x\sin x$임을 바로 생각하기

ex 6. $\int (x-2)e^x \, dx$ _ 모태가 xe^x임을 바로 생각하기

- ln적분

결국 분모를 미분한 게 분자에 오는 $\frac{f'}{f}$꼴이어야 한다. 최대한 저 형태를 맞춰주자.

ex 7. $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{4-f(x)}} dx$ _ 루트 적분은 기본이니 숙지해두자.

ex 8. $\int \frac{1}{x^3+x} dx$ _ 방해물은 제거해보자. ; $\int \frac{x^{-3}}{1+x^{-2}} dx$

2. 분수로 표현된 식의 적분

- 제일 먼저 의심해볼 것은 위에서 본 ln적분이다.

- 만약 ln적분이 바로 보이지 않는다면 그 다음으로 생각해볼 것은 부분 분수이다.

ex 9. $\int \frac{1}{x^4+x}dx$

- 삼각 치환이라는 친구도 있긴 하다.

ex 10. $\int \frac{1}{x^2+1}dx$ -> '$x=\tan\theta$'로 치환

ex 11. $\int \frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}dx$ -> '$x=\cos\theta$'로 치환

- 제일 안 보이는 것은 대칭성을 이용한 적분이다. -> 가장 먼저 고려해야 함.

ex 12. $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^x+1}dx$ _ $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^x+1}dx = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{e^x+1} + \frac{1}{e^{-x}+1} \right\} dx = \int_0^{\pi} \frac{e^x+1}{e^x+1}dx = \pi$

중요한 것은 길을 하나 잡았으면 그 길을 쭉 밀고 나가야 한다는 것이다.
ex 9. 의 경우만 해도 다양한 풀이가 가능하다.

Sol1_ $\int \frac{x^{-4}}{1+x^{-3}}dx$ _ ln적분으로 풀림

Sol2_ $\int \frac{1}{x(x^3+1)}dx = \int \frac{1}{(x^2+x)(x^2-x+1)}dx$ _ 부분 분수 적분으로 풀림(삼각치환)

Sol3_ $\int \frac{1}{x(x^3+1)}dx$, '$x^3+1=t$'로 치환 _ 치환적분으로 풀림.

연습 문제 1). $\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\,dx$ = ?

연습 문제 2). $n \geqq 3$, $I_n = \int_0^{\pi} \sin x^n\,dx$ 일 때, I_n과 I_{n+2}의 관계식 세우기

연습 문제 3). $\int_0^{\pi} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+1}dx$ = ?

* '$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$' 이용

---

1) $\int \frac{\sec^2 x}{(\tan x+1)^2}dx = -\frac{1}{(\tan x+1)}+C$

2) $I_{n+2} = \int_0^{\pi} \sin x \times \sin^{n+1} x\,dx = -\sin^{n+1}x\cos x + \int (n+1)\sin^n x\cos^2 x\,dx = (n+1)I_n - \int_0^{\pi}(n+1)\sin^{n+2}x\,dx$, $\therefore \frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2}$

3) $f(x) = \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x}+1}$, $f(\pi-x) = \frac{e^{-\cos x}}{e^{-\cos x}+1} = \frac{1}{e^{\cos x}+1}$ $\quad \therefore f(x)+f(\pi-x) = 1$ $\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{f(x)+f(\pi-x)\}\,dx = \frac{\pi}{2}$

3. 적분에 대한 두 가지 관점

- 첫 번째 관점 _ 미분의 역
무엇을 미분하면 원래 식이 나오는지 생각하여 적분하는 것이다.

$\int_0^x f(t)\,dt = F(x)$라고 두는 것이 기본 태도이다. _ $F(0)=0$, $F'(x)=f(x)$

문제에서 $\int_a^x f(t)\,dt$의 경우, $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$로 두어 $F(a)=0$을 이용하거나,

$\int_0^x f(t)\,dt = F(x)$라고 하여, $F(x)-F(a)$로 접근할 수 있다.

ex 13. $\int_0^x f(t)\,dt \geqq 0$ 에서 알아낼 수 있는 것을 구하시오.

-> $\int_0^x f(t)\,dt = F(x) \geqq 0$, $F(0)=0$이므로 $F'(0)=f(0)=0$ 임을 알 수 있다.

이를 한 번 기출에 적용해보자.

ex 14. 2016학년도 9월 평가원 21번

함수 $f(x)$를

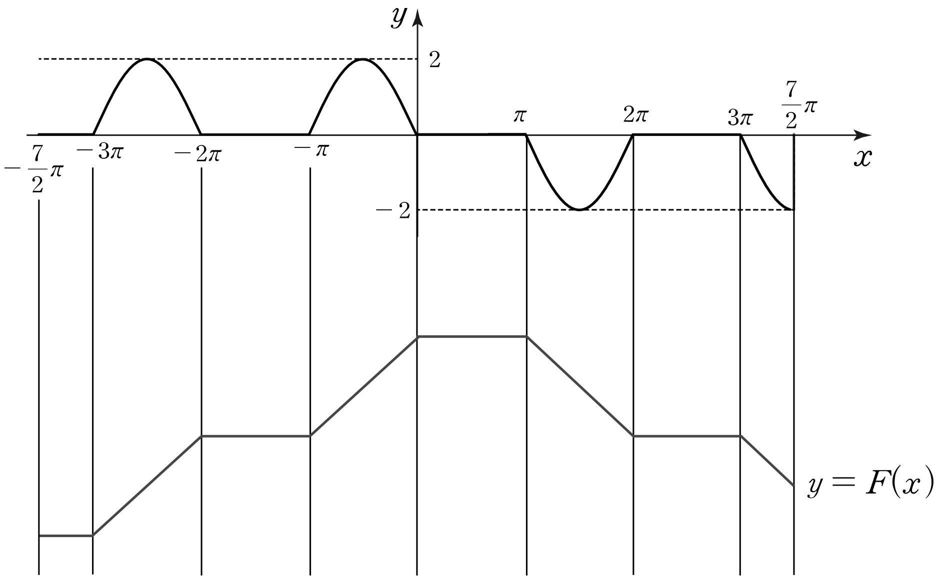
$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\frac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x-|\sin x| & \left(0 \le x \le \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \ge 0$이 되도록 하는 실수 a의 최솟값을 α, 최댓값을 β라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, $-\frac{7}{2}\pi \le a \le \frac{7}{2}\pi$) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ $\frac{9}{2}\pi$

$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) \geqq 0$ 이라고 하자. $F(a)=0$이므로, $F'(a)=f(a)=0$

$y=F(x)$를 그리기 위해 도함수인 $f(x)$를 살피자.



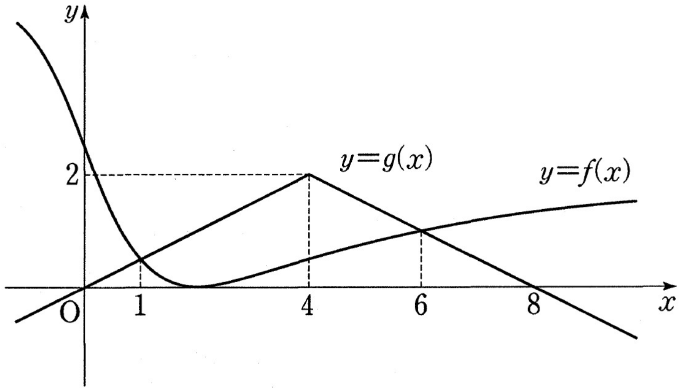
x축은 확정이 안 된 상태인데, $F(a)=0$과 $F(x)\geqq 0$이라는 걸 고려하면, $F(x)$의 최소가 $y=0$ 임을 알 수 있다. 따라서 a는 맨 왼쪽의 $-\frac{7}{2}\pi \leqq a \leqq -3\pi$에 해당한다.

그러므로 $\beta-\alpha=\frac{\pi}{2}$임이 바로 확인 가능하다.

이런 유형을 하나 더 보자.

ex 15. 2017학년도 6월 평가원 20번

함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0\le a\le 8$ 인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$ 의 최솟값은? [4점]

① $14-5\ln 5$　② $15-5\ln 10$　③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$　⑤ $16-5\ln 5$

$\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^8 g(x)\,dx$ 를 $h(a)$라 둬보자. $h'(a)=f(a)-g(a)$ 이므로 $a=6$일 때, $h(x)$가 최소.

따라서 $a=6$을 대입해 적분만 하면 답이다.

이렇게 적분을 '미분의 역'으로 생각하여 $F(x)$같은 새로운 함수를 설정하는 것이
첫 번째 도구이다.

- 두 번째 관점 _ 넓이로 적분을 생각하기

첫 번째 관점 때는 원래 함수를 적분한 함수의 도함수로 보는 것이지만, 이 관점은 원래 함수를 정말 원래 함수로 생각하면서 넓이를 구해 적분된 함수를 구하는 것이다.

말 그대로 원래 함수를 그리고 넓이를 살피는 태도가 필요하다.

기출 문제 하나와 같이 살펴보자.

ex 16. 2020학년도 사관학교 30번
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g'(2)=0$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge 0$이다.

$g'(-1)$의 값이 최대가 되도록 하는 함수 $f(x)$에 대하여 $f(-1)=\dfrac{n}{m-3\ln 3}$일 때, $|m\times n|$의 값을 구하시오. (단, m, n은 정수이고, $\ln 3$은 $1<\ln 3<1.1$인 무리수이다.) [4점]

발문과 조건을 찬찬히 해석하자.

$f(x)=x^3+\sim\sim$ $\quad$ (가): $g'(2)=\dfrac{f(2)}{3}=0 \quad \therefore f(2)=0$

(나): 잠시 첫 번째 관점이었던 '미분의 역'을 사용해보자. $g(0)=0$이고,
$g(x) \geqq 0$이므로 $g'(0)=0$ -> $f(0)=0$까지 알 수 있다.

$f(x)=x(x-2)(x-k)$라고 하자.
$g'(-1)=\dfrac{f(-1)}{2}=-\dfrac{3}{2}(k+1)$이므로 $g'(-1)$이 최대가 되려면 k는 최소이다.
우리는 g를 해석하기 위해 g'인 '$\dfrac{f(t)}{|t|+1}$'의 넓이를 살필 것이다.
어차피 분모는 양수이므로 $f(t)$의 부호가 곧 g'의 부호와 같다.

$k<0$이면 $k<x<0$에서 g'가 양수인 부분이 존재한다.
이때, $g(c)$ (c는 $k<c<0$인 모든 실수)는 $g(0)$보다 작으므로 $g \geqq 0$에 위배된다.

그러므로 $0<k<2$인 상황을 생각해보자.

$0<x<k$에서는 g'은 양수, $k<x<2$에서는 g'은 음수, $2<x$에서는 g'은 양수이다.

$g \geqq 0$이므로 $0<x<k$에서 증가한 만큼이 $k<x<2$에서 감소한 만큼보다 크거나 같아야 할 것이다.
k가 최대한 작아질 때는 증가량과 감소량이 같을 때이므로 $\displaystyle\int_0^2 \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt=0$임을 알 수 있다.

더 쉽게 해보자.

$g(x) \geqq 0$처럼 함수에 대한 식이 부등호와 같이 나오면 함수를 냅둘 이유가 없다.
$g(x)$의 최소를 m이라 하면, $m \geqq 0$이라고 풀 수 있다.

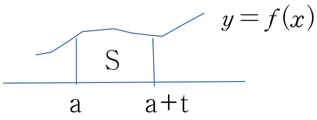
m을 구하기 위해 g'을 구하자. $g'(x)=\dfrac{f(x)}{|x|+1}$ -> 분모는 양수이므로 f의 부호 변화는 g'의 부호 변화와 완전히 일치한다.

$0<k<2$일 때, f는 열린구간 $(0, k)$에서 $+$, 열린구간 $(k, 2)$에서 $-$, 열린구간 $(2, \infty)$에서 $+$.
$\therefore$ g는 $x=2$에서 극소를 가진다.

$m=g(2)$이므로 '$\displaystyle\int_0^2 \frac{f(t)}{|t|+1}\,dt=0$'를 계산하면 k가 나오며 문제가 풀리게 된다.

철저히 g'의 넓이를 보며 g를 예측했다는 사실을 기억하며 2번 관점을 잘 얻어가자.

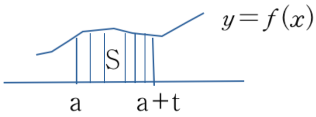
4. 넓이의 변화율



$S(t)=\int_{a}^{a+t} f(x)\,dx$ −> $S'=f(a+t)$

여기서 알 수 있는 사실은 넓이의 변화율은 '길이'라는 사실이다.

S의 변화율은 $f(a+t)$ 즉, $a+t$에서의 함숫값인 '길이'이다.

쉽게 이해하려면 

이 그림처럼 S라는 넓이가 표시해놓은 선분이 모여 만들어졌다고 생각하면 된다.

그러므로 t가 조금 증가해 새로운 넓이가 추가된다면, 그 새로운 넓이는 정확히 새로 추가된 선분의 길이와 같다는 것이다.

'S(넓이)의 변화율 = 길이'을 잘 기억하자.

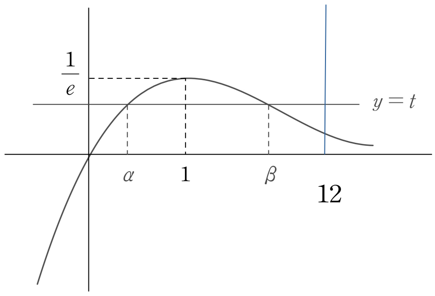
이를 문제에서 적용해보자.

ex 17. 2019학년도 사관학교 30번

함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\infty\right)$에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_{0}^{12}|f(x)-t|\,dx$$

가 $t=k$에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$의 실근의 최솟값을 a라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$의 값을 구하시오. [4점]



$0 \sim \alpha$의 넓이 S_1, $\alpha \sim \beta$의 넓이 S_2, $\beta \sim 12$의 넓이 S_3

(단, $t \leqq \frac{1}{e}$)

$g(t) = S_1 + S_2 + S_3$ −> 넓이의 변화율을 생각해보자.

t가 증가함에 따라 S_1과 S_3는 증가하고, S_2는 감소한다.

'넓이의 변화율은 길이'이다.

S_1의 증가 변화율= α S_2의 감소 변화율= $\beta - \alpha$ S_3의 증가 변화율$=12-\beta$

$g(t)$의 극소는 감소가 증가로 바뀔 때이다. 즉, 감소 변화율이 증가 변화율보다 크다가 작아지는 지점이다.

$\therefore\ t = k$일 때, $\alpha + (12 - \beta) = \beta - \alpha$ −> $\beta = \alpha + 6$

이를 계산하면 $y = k = \alpha e^{-\alpha} = (\alpha+6)e^{-(\alpha+6)}$ $\therefore\ a = \alpha = \frac{6}{e^6 - 1}$ −> $\ln\left(\frac{6}{a} + 1\right) = 6$

$t = 1$: $|f(x) - t| = t - f(x)$ ($\because\ f(x) \leqq \frac{1}{e}$)

−> $g(t) = \int_o^{12} |f(x) - t|\,dx = \int_0^{12} \{t - f(x)\}dx = 12t - \int_0^{12} f(x)\,dx$ $\therefore\ g'(1) = 12$

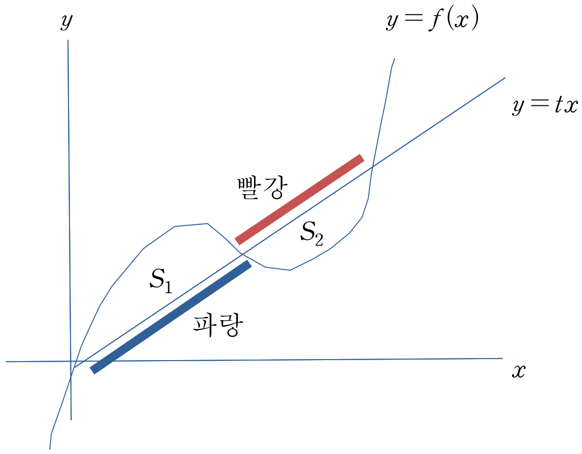
답 : $12 + 6 = 18$

직접 미분해보는 것이 아니라 넓이의 변화율을 바로 '길이'로 보는 관점을 얻으면 이같이 눈으로도 극소나 극대를 알 수 있다.

연습 한 번만 더 해보자.

ex 18. 대충 만든 문제

(가): $f(x)=x^3-9x^2+22x$
(나): $f(x)=tx$가 세 점에서 만나고, 세 근 중 가장 큰 근을 $\alpha(t)$라 하자.
(다): $g(t)=\int_0^{\alpha(t)}|f(x)-tx|\,dx$ ($\frac{7}{4}<t<22$)
$g(t)$는 $t=k$에서 최솟값 p를 갖는다. $k\times p$의 값은?



t가 증가함에 따라 S_1은 점차 감소 -> 감소 변화율= 파란 선분의 길이
S_2는 점차 증가 -> 증가 변화율= 빨간 선분의 길이

$g(t)$의 극소는 감소 변화율이 증가 변화율보다 크다가 작아지는 바로 그 순간.
$\therefore$ $t=k$일 때, 빨간 선분의 길이=파란 선분의 길이 -> 원점과 변곡점을 지나는 직선

f의 변곡점의 x좌표는 3이므로, 변곡점을 지나는 직선과의 교점은 0, 3, 6에서 생긴다.

$f(x)=x^3-9x^2+22x=x(x-3)(x-6)+4x$ -> $t=k=4$ -> $t=4$: $p=S_1+S_2=2S_1$

$$=2\int_0^3 x(x-3)(x-6)\,dx=2\int_0^3 (x-3)(x^2-6x+9-9)\,dx=2\int_0^3\{(x-3)^3-9(x-3)\}\,dx=\frac{81}{2}=p$$

$\therefore$ $k\times p=162$ (답)

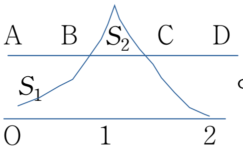
ex 18-1. 2018년 3월 교육청 30번
함수

$$f(x)=\begin{cases} e^{x} & (0 \le x < 1) \\ e^{2-x} & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

에 대하여 열린 구간 $(0,\ 2)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{0}^{x} |\, f(x)-f(t)\,|\, dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae+b\sqrt[3]{e^2}$이다. $(ab)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



적분 범위는 $0 \sim x$이다. x가 증가함에 따라 어떻게 변하는지 살펴보자.
아까처럼 $x>1$이면, $f(x)$가 감소함에 따라 S_1은 감소하고, S_2는 증가한다.
$0<x<1$에서는 S_1만 존재하고 $f(x)$가 증가함에 따라 항상 증가할 것이다.

따라서 $x>1$에서 넓이 감소의 변화율은 $\overline{AB}$이고, 증가의 변화율은 $\overline{BC}$이다.

극소는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 $x=\dfrac{4}{3}$일 때고, 극대는 $f(x)$가 증가하다가 감소로 돌아서는 $x=1$일 때이다.

각각의 값을 계산해주면, $g(1)=1$, $g\left(\dfrac{4}{3}\right)=-3e^{\frac{2}{3}}+2e+1 \quad \therefore\ (ab)^2=36$ (답)

5. 괜한 미분이나 적분을 안 해도 되는 경우를 정리해보자.

− 적분을 '미분의 역'으로 생각하면, f를 도함수로 원래 함수인 F를 구하면 된다.

−'넓이의 변화율=길이'를 이용하면 미분 없이 극점을 찾을 수 있다.

−대칭인 걸 발견하면 특별한 적분이나 미분 없이 값을 구할 수 있다.

ex 19. $\int_0^{\pi}(4x^2-4\pi x+\pi^2)\sin 2x\ dx\ =\ ?$ 4)

ex 19−1. $\int_0^{\pi}(4x^2-4\pi x+2\pi^2)\sin 2x\ dx\ =\ ?$5)

− 미분을 나타내는 극한식의 경우 낚이면 안 된다.

ex 20. $\lim_{x\to 1}\int_0^{\frac{x-1}{3}}\frac{\ln(9t+3)e^{3t+1}}{(x-1)(6t+1)}\,dt\ =\ ?$ 6)

− $\frac{d}{dx}\int_0^x f(x,t)\,dt=\int_0^x\frac{d}{dx}f(x,t)\,dt+f(x,x)$를 이용하자.
(적분 기호 안을 x에 대해 미분하고, t 자리에 x넣은 식 뒤에 더하기)

ex 21. $\frac{d}{dx}\int_0^x(x-t)f(t)dt=\ ?$ −> $\int_0^x\frac{d}{dx}(x-t)f(t)dt+(x-x)f(x)=\int_0^x f(t)dt$

− 주기함수의 적분은 구간의 길이(주기의 배수일 때)만 살피면 된다.

ex 22. $f(x)=6\sin x+3$ 일 때, $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{17\pi}{8}}f(x)dx=?$7)

---

4) $=\int_0^{\pi}4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2\sin 2x\ dx=0$

5) $=\int_0^{\pi}\left\{4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\pi^2\right\}\sin 2x\ dx=$ ex 19. $+\int_0^{\pi}\pi^2\sin 2x\ dx=0$

6) $=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\times\frac{1}{3}\times\int_1^x\frac{\ln 3t\ \times\ e^t}{2t-1}dt=\frac{1}{3}\times\left[\frac{\ln 3t\ \times\ e^t}{2t-1}\right]_{t=1}=\frac{e\ln 3}{3}$

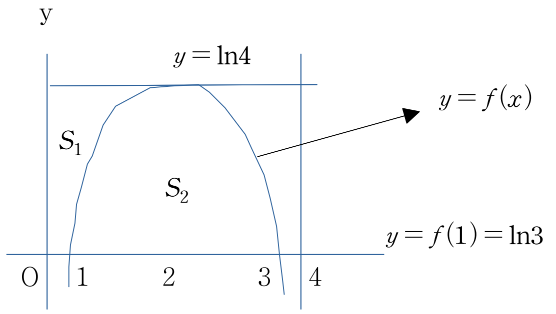
7) $\frac{17\pi}{8}-\frac{\pi}{8}=2\pi$ (한 주기) $\therefore\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{17\pi}{8}}f(x)dx=\int_0^{2\pi}f(x)dx=\int_0^{2\pi}6\sin x\ dx+6\pi=6\pi$ ($\because$ $(\pi,0)$대칭)

6. 적분에서 통용되는 중요 표현을 알아보자.

1) $\int |f'(x)|\,dx$ -> f가 감소할 부분도 강제로 증가하게 끌어올린 형태

2) $\int x|f'(x)|dx$ -> 극점을 기준으로 나눈 구간별 역함수의 넓이

ex 23. $f(x)=\ln x+\ln(4-x)$ 일 때, $\int_1^3 x|f'(x)|\,dx=?$



$1\leqq x\leqq 2$: 이때의 역함수를 $g_1(x)$라 하자. $\int_1^2 x|f'(x)|\,dx=\int_{\ln3}^{\ln4} g_1(t)\,dt=S_1$

$2\leqq x\leqq 3$: 이때의 역함수를 $g_2(x)$라 하자. $\int_2^3 x|f'(x)|\,dx=\int_{\ln3}^{\ln4} g_2(t)\,dt=S_1+S_2$

따라서 다 더하면 $S_1+(S_1+S_2)=$ 사각형 $=4\times(\ln4-\ln3)=4\ln\frac{4}{3}$ (답)

3) $\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c)$ _ 평균값 정리 변형

($\because$ $\int_0^x f(t)dt=F(x)$라 하면, $\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=f(c)$를 만족하는 c가 열린구간 $(a,\ b)$에 존재.)

ex 24. 2020학년도 9월 평가원 21번
함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$ 에 대하여 함수 $g(x)$를 '$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$'라 하자.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$\int_0^1 g(x)\,dx=[(x-1)f(x)]_0^1=f(0)=(1-0)g(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재하므로 ㄷ은 참.

4) $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)dt$로 식 변형하기. 심지어 위 끝이나 아래 끝에 x 있을 때 양변 적분 可.

ex 25. 2015학년도 9월 30번
양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
(나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점 $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\frac{t+1}{t}$이다.
(다) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(나) 삼각형의 넓이를 구해 식을 세우고 (가)에서 $f(x)>0$임을 사용하면 (식 세우는 것은 적분과 상관없으니 생략), $\frac{f(t)}{t}-\frac{f(t+1)}{t+1}=\frac{2}{t^2}$이다. $g(t)=\frac{f(t)}{t}$라 하자. $g(t+1)-g(t)=-\frac{2}{t^2}$

$g(t+1)-g(t)=\int_t^{t+1} g'(x)\,dx=-\frac{2}{t^2}$ 여기서 양변 부정적분을 할 수 있다. 단, 적분상수C는 잊지말자.

적분하면, $\int_t^{t+1} g(x)\,dx=\frac{2}{t}+C$

(다): $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2 g(x)\,dx=\left[\frac{2}{t}+C\right]_{t=1}=C+2=2 \quad \therefore\ C=0$

$\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} \frac{f(x)}{x}dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx+\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx=\left[\frac{2}{t}+C\right]_{t=\frac{7}{2}}+\left[\frac{2}{t}+C\right]_{t=\frac{9}{2}}=\frac{4}{7}+\frac{4}{9}$
$=\frac{64}{63} \quad \therefore$ 127 (답)

아까 본, '$g(t+1)-g(t)=\int_t^{t+1} g'(x)\,dx=-\frac{2}{t^2}$ 여기서 양변 부정적분을 할 수 있다. 적분하면, $\int_t^{t+1} g(x)\,dx=\frac{2}{t}+C$ '를 잊지 말자. integral 안의 식을 적분해주면서 대신 적분 상수 달아줬다.

7. 식 조작과 미분 방정식

− 적분이 바로 안 보일 때 $f(x)$는 y로, $f'(x)$는 y'으로 표기하면 쉬이 보인다.

ex 25. 2018년 4월 교육청 21번

$\frac{3}{5}<x<4$에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f(1)=2$이고

$$f'(x)=\frac{1-x^2\{f(x)\}^3}{x^3\{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 미분 가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(2)=-\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x)=\frac{1}{3}x^3\{g(x)\}^3-\frac{5}{3}$

ㄷ. $2<g(1)<\frac{5}{2}$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

식을 다시 쓰면,

$y'=\frac{1-x^2y^3}{x^3y^2}$ −> $x^3y^2y'+x^2y^3=\frac{1}{3}(x^3y^3)'=1$　　$\therefore\ x^3y^3=3x+C$

$f(1)=2$이므로, $C=5$

원래 이 문제는 적분이 까다로우나 이 방식을 쓰면 훨씬 적분이 쉽게 보인다.

ㄱ. $g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=y'|_{x=1,\ y=2}=-\frac{4}{7}$ (참)

ㄴ. $x=f(t)$ 대입: $t=\frac{1}{3}\{f(t)\}^3\times t^3-\frac{5}{3}$ −> '$3x=x^3y^3-5$' 미리 구한 식과 동일함. (참)

ㄷ. 'ㄴ'에 의해 $3g(1)=\{g(1)\}^3-5$. '$h(x)=x^3-3x-5$'라 하자.

$1<x$에서 h는 증가하고, $h(2)<0$, $h\left(\frac{5}{2}\right)>0$ 이므로 사이에 근이 반드시 존재 (참)

- 미분 방정식

고교 과정에서는 $f(x)$를 $f'(x)$나 $f''(x)$와의 관계로 표현되는 식을 이른다고 생각하자.

ex 26. $f(x)=2f'(x)$, $f(1)=e$ 일 때 $f(x)=?$ _ ln적분8)

ex 27. $f(x)=f''(x)$, $f(0)=f'(0)$, $f(x)>0$ 일 때 $f(x)=?$ _ ff' 적분9)

ex 28. $f'(x)=2\sqrt{4-f(x)}$, $f(1)=2$ 일 때 $f(x)=?$ _ 루트 적분10)

ex 29. $f'\left(\frac{1}{x}\right)=3x^3+5$, $f(1)=2$ 일 때 $f(x)=?$ _ $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 적분11)

ex 30. $f(x)+f'(x)=5$, $f(0)=6$ 일 때 $f(x)=?$ _ e^x 적분12)

ex 31. $2f(x)-f'(x)=5$, $f(0)=6$ 일 때 $f(x)=?$ _ e^{-x} 적분13)

이처럼 적당한 식의 변형을 통해 $f(x)$가 깔끔하게 적분되도록 할 수 있으니 위의 사례를 기억해 문제에서 써먹는 걸 목표로 하자.

다음 페이지에서 기출과 함께 살펴보자.

---

8) $\frac{1}{2}=\frac{f'(x)}{f(x)}$ $\ln f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ $\therefore f(x)=e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}$

9) $f(x)f'(x)=f'(x)f''(x)$, $\{f(x)\}^2=\{f'(x)\}^2$, $1=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 이하 ex 27.과 동일

10) ex 7. 참조

11) $\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)=3x+\frac{5}{x^2}$, $-f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{x}+C$

12) $e^x\{f(x)+f'(x)\}=5e^x$, $e^xf(x)=5e^x+C$

13) $e^{-2x}\{2f(x)-f'(x)\}=5e^{-2x}$, $e^{-2x}f(x)=-5e^{-2x}+C$

ex 32. 2017년 3월 교육청 21번

구간 $[0,1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt \ \ (0\le x\le 1)$$

은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $F(x)=f(x)-x$
(나) $\int_0^1 F(x)dx=e-\frac{5}{2}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $F(1)=e$

ㄴ. $\int_0^1 xF(x)dx=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\int_0^1 \{F(x)\}^2dx=\frac{1}{2}e^2-2e+\frac{11}{6}$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$F'(x)=f(x)=f'(x)-1$, $e^{-x}\{f'(x)-f(x)\}=e^{-x}$ 양변 적분하면, $e^{-x}f(x)=-e^{-x}+C$

(나): $\int_0^1\{f(x)-x\}dx=F(1)-\frac{1}{2}=e-\frac{5}{2}$ $\therefore C=1$ −> $f(x)=e^x-1$ −> $F(x)=e^x-x-1$

ㄱ. (거짓) $F(x)=e^x-x-1$

ㄴ. 직접 적분해도 되고 $\int\{xf(x)-x^2\}dx=\int\{xf'(x)-x-x^2\}dx$ 계산해도 됨. (참)

ㄷ. 직접 적분해도 되고 $\int F(x)\times\{f(x)-x\}dx$로 해도 됨. (참)

이 역시 원래는 $f(x)$를 못 구하고 풀어야 하지만, 미분 방정식 사용하면 구할 수 있음.

8. 역함수 적분

- $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계라고 하자.

$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx$가 역함수 적분의 가장 기본 형태이다. $x=g(t)$를 저기다 밀어 넣자.

$\int_a^b f(g(t))\,dx = \int_a^b tg'(t)\,dt = [tg(t)]_a^b - \int_a^b g(t)\,dt$로 표현된다.

그러므로 f와 g를 '왔다갔다'할 때는 서로의 짝을 x에 밀어 넣어주면 된다.
이러면 아래 끝과 위 끝이 잘 맞아서 좋다.

하는 법은 정리하면, 구간 맞추고, $f(g(t))=t$ 이용해서 정리하고 무심하게 g'을 붙이자.

그리고, $\int xf'(x)\,dx$의 형태가 나오면 역함수 적분을 의심하자! (거의 사실이나 다름없음)

2022학년도 예비 시행 29번
함수 $f(x)=e^x+x-1$과 양수 t에 대하여 함수

$$F(x)=\int_0^x \{t-f(s)\}ds$$

가 $x=\alpha$에서 최댓값을 가질 때, 실수 α의 값을 $g(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}dt$의 값을 구하시오. [4점]

정말 29번임에도 쉬이 풀린다.
$F'(x)=t-f(x)$, $F(0)=0 \rightarrow x=\alpha$에서 극점 가지므로, $f(\alpha)=t \rightarrow f(g(t))=t$ _ 역함수 관계.

$\int_{f(1)}^{f(5)} \frac{g(t)}{1+e^{g(t)}}\,dt = \int_1^5 \frac{t}{1+e^t} \times f'(t)\,dt$ (구간 맞췄고, $f(g(t))=t$로 정리, f'을 무심하게 툭.)

$f'(t)=e^t+1 \rightarrow \int_1^5 t\,dt = \frac{1}{2}(5^2-1^2)=12$ (답)

이번에는 조금 어려워 보이는 대신, $\int xf'(x)\,dx$의 형태를 연습할 수 있는 문제를 보자.

2022학년도 수능 30번
실수 전체의 집합에서 증가하고 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)dx=\frac{5}{4}$

(나) 함수 $f(x)$이 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

이 문제에 앞서 잠시 치환적분에 담긴 의미를 알아보고자 한다.

$\int f(2t+1)dt$가 있을 때 $(2t+1)$을 치환할 필요가 없다. 어차피 $+1$은 평행이동으로 구간 옮기면 되니 별 문제가 없다. 그러나 t앞의 계수가 2인 것은 상당히 불편하다.

하지만 $f(2t)$와 $f(t)$의 의미를 알면 된다. $f(2t)$는 $f(t)$를 두 배 좌우로 압축한 형태이다.

궁금하면 $\sin x$와 $\sin 2x$를 생각해보라.

$f(2t)$ 입장에서 $f(t)$는 두 배 늘린 것과 다름없다. 그러면 $f(t)$라고 생각하고 적분하면, 넓이가 두 배 넓게 나오는 셈이다. 그러면 보정으로 $\frac{1}{2}$를 곱하면 된다.

$\therefore$ $f(2t+1)$을 적분하고 싶으면 아래 끝, 위 끝만 맞춰주고 $f(t)$ 앞에 $\frac{1}{2}$ 붙여서 적분해주면 된다.

ex. $\int_0^4 \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}t+4\right)dt=\int_4^6 \frac{1}{2}\times 2\times f(t)\,dt=\int_4^6 f(t)\,dt$ 이런 식으로 해주면 된다.

다시 문제로 돌아가보자.

$f(x)$는 우선 미분 가능하다.

(가): $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$

(나): $f(g(x))=x$, $x \geqq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x) \rightarrow g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$

역함수 g를 두 배 좌우로 압축하면 f를 위아래로 두 배 늘리란다. 이때 조심해야 할 것은 둘의 x좌표가 다르다는 것이며 잘 맞춰주어야 한다 (하나는 x, 하나는 $2x$).

$\int_1^8 xf'(x)\,dx$를 구하는 게 문제인데, 형태가 익숙하다. 아마 역함수 적분일 것이다.

우선, $f(1)=1$이고, $g(2x)=2f(x)$이므로, $f(2)=2$. 마찬가지로 반복하면, $f(4)=4$, $f(8)=8$.

$\therefore \int_1^{8.} xf'(x)dx=\int_{g(1)}^{g(8)} g(t)\times\frac{1}{g'(t)}\times g'(t)\,dx=\int_1^8 g(t)\,dt$

우리는 $g(2x)=2f(x) \rightarrow g(x)=2f\left(\frac{1}{2}x\right)$로 x의 범위를 반으로 줄일 수 있다.

또한, 역함수 적분을 할 수 있으므로, 자유자재로 f와 g를 갈아탈 수 있다.

우리는 절반으로 범위를 압축하고, 갈아타고, 다시 줄이고, 갈아탈 수 있다.

1~8이라는 구간을 등비수열로 나눠보자. 어차피 전부 $\int_1^2$로 모을 수 있을 거다. 압축이 가능하므로.

$\int_1^8 g(t)\,dt=\int_1^2 g(t)\,dt+\int_2^4 g(t)\,dt+\int_4^8 g(t)\,dt$

1. $\int_4^8 g(t)\,dt$를 반으로 팍 압축해보자. $\int_4^8 g(t)\,dt=\int_4^8 2f\left(\frac{1}{2}t\right)dt=\int_2^4 2\times2\times f(t)\,dt=4\int_2^4 f(t)\,dt$

2. $\int_2^4 g(t)dt=\int_{f(2)}^{f(4)} g(f(t))\times f'(t)\,dt=\int_2^4 tf'(t)\,dt=4f(4)-2f(2)-\int_2^4 f(t)\,dt$

다르게 표현하면, $\int_2^4 g(t)\,dt=\int_2^4 2f\left(\frac{1}{2}t\right)dt=\int_1^2 4f(t)\,dt=5=16-4-\int_2^4 f(t)\,dt$

$\therefore \int_2^4 f(t)\,dt=7 \rightarrow$ 1. 의 값은 28.

3. $\int_1^2 g(t)\,dt=\int_{f(1)}^{f(2)} g(f(t))\times f'(t)\,dt=\int_1^2 tf'(t)\,dt=2f(2)-f(1)-\int_1^2 f(t)\,dt$

구한 걸 다 더하자. $4\times7+5+3-\frac{5}{4}=\frac{139}{4} \quad\rightarrow\quad 143$ (답)

위 문제에서 배워갈 것은 우리가 범위를 조절할 수 있다는 사실을 $g(2x)=2f(x)$라는 식에서 알아내고,

$\int xf'(x)\,dx$를 보고 역함수 적분을 할 수 있다는 사실을 통해 결국 주어진 범위인 $\int_1^8$을

$\int_1^2$로 압축 가능할 것이라고 생각하고 계산에 들어가야 한다는 사실이다.

이걸 알고 자의적으로 계산을 시작한 사람과 무작정 시작하는 사람의 난도는 차원이 다를 것이다.

무작정 치환적분을 하는 것이 아니라 함수의 압축과 늘리기를 이해하기를 얻어가자.

사실 이것만 알면 이제 역함수 적분에서 얻어갈 것은 없고 역함수 자체에서 개념을 배워야 한다.

역함수 관련 칼럼은 다음에 서술하겠다.

*번외 _ 역함수 적분의 특이 케이스

$y=\tan x$의 역함수를 구해보자.

$x=\tan y \rightarrow dx=\sec^2 y\,dy \rightarrow dx=(\tan^2 y+1)\,dy \rightarrow dx=(x^2+1)dy \rightarrow \frac{1}{x^2+1}dx=dy$

양변을 적분하면, $\int \frac{1}{1+x^2}dx=y$. 역함수가 구해졌다.

$y=f(x)$를 $x=f(y)$로 역함수를 구하고, $dx=f'(y)\,dy$로 적분하는 것이 특징이다.

교육과정 상 안 나올 것 같지만 일단 써놓는다.

9. 적분 풀이 매뉴얼 (순서 有)

Ⅰ. 대칭성 파악 (feat. ex 12, 19.)

Ⅱ. 직접 적분이 가능한지 아닌지를 판단

Ⅲ. 직접 적분이 될 경우, 하면 됨

Ⅳ. 직접 적분이 안 될 경우
'적분 안 해도 되는 경우'와 '적분이 되도록 형태를 변환해야 하는 경우' 중 무엇인지 판단

Ⅴ. '적분 안 해도 되는 경우'에는 5번에 있음.

Ⅵ. '적분이 되도록 형태 변환'하는 것은 1번 2번 5번에 있음.

Ⅶ. 계산할 때 최대한 대칭을 만들어서 지워가기 (feat. ex 19.)

Ⅷ. 그래프 그림이 있으면 넓이를 껴 넣어 간단한 형태로 생각해보기 (feat. ex 23.)

Ⅸ. 6번, 7번 형태 보이면 바로 사용