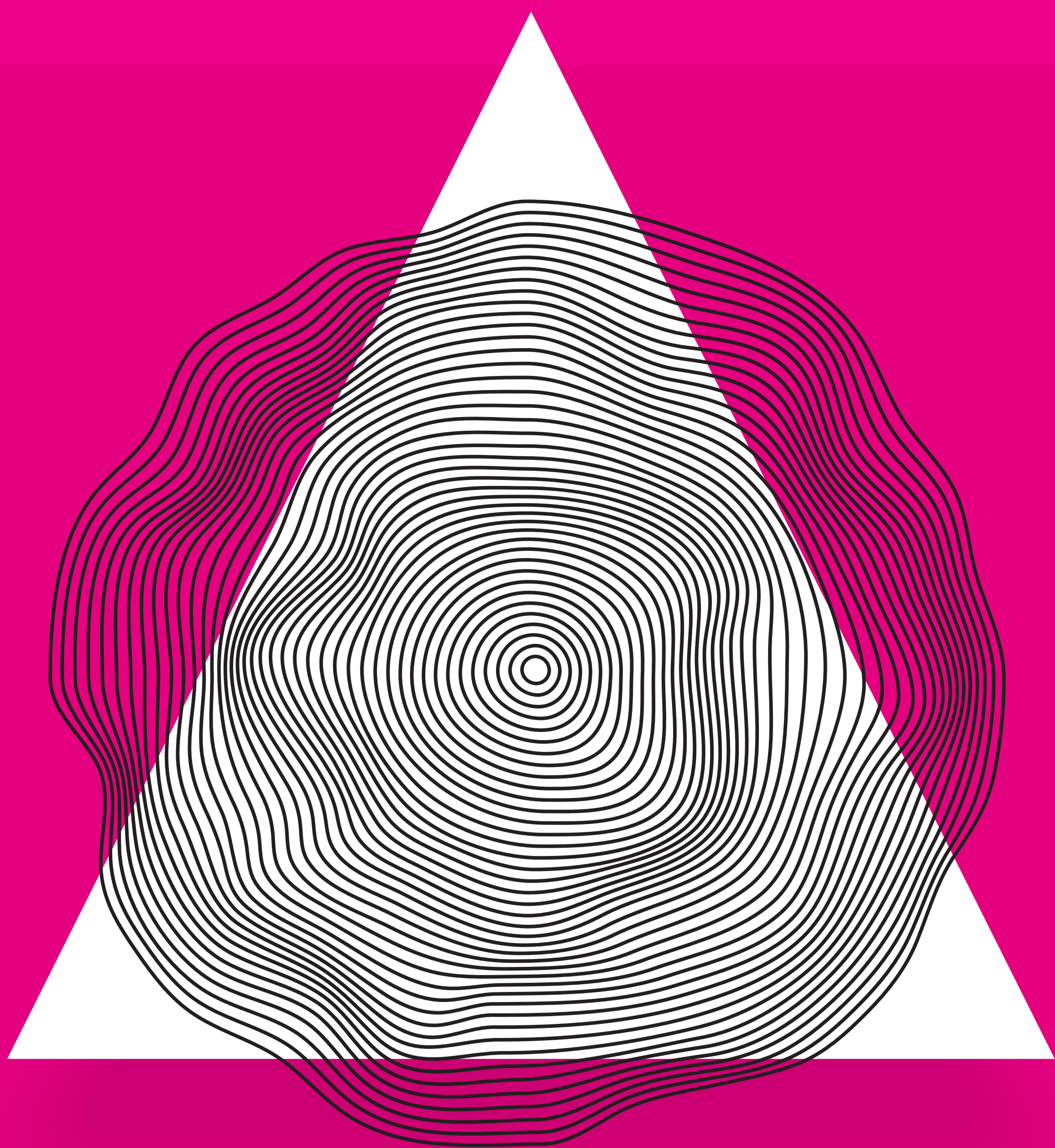
기출의_ 파급효과



smart is sexy
Orbi.kr

기출의 파급효과

수학영역 × 수학 I × STANDARD

수학 I
STANDARD
기출의 파급효과

orbi.kr

수학 I

저자의 말

안녕하세요. 오르비 파급효과입니다. 집필한 지 4년째네요. EBS 선별, 기출의 파급효과 시리즈를 통해 큰 사랑을 받았습니다. 여기까지 오는데 너무 과분한 사랑을 주신 분들 너무 감사합니다. 이제 본격적으로 교재 소개를 해보겠습니다.

저는 다음과 같은 교재를 만들었습니다.

1. 기출의 파급효과 standard에는 수학Ⅰ 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.

각 Chapter를 나누는 기준이 교과서 목차가 아닌 기출을 푸는 데 정말 필요한 태도와 도구입니다. 기존 개념서들보다 훨씬 얇습니다. 빠르게 실전 개념을 정리할 수 있습니다. 예제 해설까지 꼼꼼히 읽는다면 준킬러, 킬러 문제에서 생각의 틀이 확실히 잡힐 것입니다. 각 Chapter를 '순서대로' 학습하신다면 더욱 큰 학습효과를 기대할 수 있습니다.

2. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

수학Ⅰ 기출 중 킬러는 물론 오답률이 높은 문제들을 예제로 들었습니다. 본문 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다.

예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 기출의 진화과정을 느낀다면 자연스럽게 기출에 대한 태도와 도구들이 정리됩니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

예전 킬러 문제에 쓰였던 아이디어 2개 이상이 현재의 준킬러, 킬러에 쓰입니다. 수능 때 킬러를 풀 생각이 없어 과거의 킬러를 제대로 학습하지 않는 우를 범한다면 준킬러도 못 풀거나 빨리 풀기 힘듭니다. 따라서 태도와 도구를 기반으로 한 기출의 킬러 학습은 필수입니다.

3. 평가원 문항뿐만 아니라 교육청, 사관학교 문항도 중요한 기출들입니다.

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다.

이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다.
기출의 파급효과 standard에는 평가원, 교육청, 사관학교 기출 중 가장 핵심이 되는 142문제를 담았습니다.

4. 예제 해설과 유제 해설은 문제를 푸는데에 있어 필요한 생각의 흐름을 매우 자세하게 담았습니다.

예제 해설과 유제 해설은 단계별로 분리되어 있어 이해가 더욱 쉽습니다. 문제에서 필요한 태도와 도구들을 어떻게 쓰는지 과외처럼 매우 자세히 알려줍니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 시키기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 224문제로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

CHAPTER

05 수열

수열

1. 기본 개념

수열의 정의 : 차례로 나열된 수의 열

항 : 수열에서 나열된 각각의 수

일반항 : 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$에서 n번째 항 a_n을 수열의 일반항이라 한다.

표현 : 일반항이 a_n인 수열은 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

2. 수열과 함수의 관계

수열의 기본적 정의는 차례로 나열된 수의 열이긴 하지만,
함수를 이용한다면 **수열은 자연수 전체의 집합 N을 정의역으로 갖는 함수 $f(n)$**으로 볼 수 있고,
자연수 n에 대응하는 함숫값 $f(n)$이 a_n(수열의 일반항)이 된다.

예를 들어 이차함수 $f(x)=x^2-2x+3$와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=f(n)$이면,
수열 $\{a_n\}$의 각 항은 함수 $y=f(x)$의 정의역을 자연수의 집합으로 제한했을 때의 치역의 원소이다.

이처럼 우리가 익숙하게 알고 있는 실수 전체의 집합에서 정의된 함수들도 정의역을 '자연수의 집합'으로 한정하기만 한다면 함숫값들을 수열로 볼 수 있고, 관련 기출 문제도 많다.

유리함수 $f(x)=\dfrac{8x}{2x-15}$와 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=f(n)$이다. (16년 3월 교육청 나형 30번)
$f(x)=\log_4 x$일 때, 수열 $\{f(2^n)\}$은 등차수열이다. (05학년도 6월 평가원 나형 24번 (ㄴ) 선지)

수열을 함수로 해석한다면 수열에 대한 유연한 관점을 가질 수 있다는 점에서 굉장히 유용하다. 등차, 등비수열, 수열의 합에서도 수열의 함수적 의미가 매우 중요하므로 앞으로는 계속해서 수열과 함수를 연결지어 사고하자.

등차수열

1. 등차수열의 정의, 판별, 함수와의 관계

(1) 정의

첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 한다.
등차수열에서 **더하는 일정한 수** 또는 **연속인 두 항의 차를 공차**라고 하고, 일반적으로 d로 표현한다.

첫째항이 a이고 공차가 d인 **등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n**은 다음과 같다.

$$a_n = a + (n-1)d \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이때, 첫째항이 a이고 공차가 d인 **등차수열의 귀납적 정의**는 다음과 같다. (수열의 귀납적 정의는 수열을 위와 같은 일반항이 아닌 '처음의 몇 개의 항과 이웃하는 항의 관계식'을 통해 정의하는 것을 말한다. 〈Chapter 6〉에서 자세히 배운다.)

$$a_1 = a,\; a_{n+1} = a_n + d \; (n = 1, 2, 3, \cdots) \text{ 혹은 } a_1 = a,\; a_{n+1} - a_n = d \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

오른쪽 식은 왼쪽 식에서 a_n을 이항한 것뿐이지만, 실제 문제에서 만났을 때 헷갈리는 경우가 종종 있으므로 두 형태 모두 알아두자.

혹은 다음과 같이 **등차중항을 이용해서 등차수열을 귀납적으로 정의할 수도 있다.**

$$a_1 = a,\; a_2 = a + d,\; a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} \; (n = 1, 2, 3, \cdots) \text{ 혹은}$$
$$a_1 = a,\; a_2 = a + d,\; a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \; (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

※ **$\{a_n\}$이 등차수열이라면 '$\{a_n\}$의 서로 다른 두 항의 값' 또는 '$\{a_n\}$의 하나의 항의 값과 공차'만 안다면 일반항 a_n을 구할 수 있다.** 등차수열의 일반항은 미지수 a, d를 포함하고 있으므로 일반항을 완전히 알아내려면 서로 다른 두 개의 정보가 필요한 것이다.

태도: 서로 다른 n개의 미지수의 값을 알아내려면 적어도 서로 다른 n개의 정보가 필요하다.

(2) 등차수열 판별 (다항식으로 보는 등차수열)

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = a+(n-1)d\,(n=1, 2, 3, \cdots)$에서 a_n을 n에 관해 정리하면 $a_n = dn + a - d$이다.

이때
$d=0$이면 a_n은 상수이고,
$d \neq 0$이면 a_n은 n에 관한 일차식이다.

특히 n의 계수가 $\{a_n\}$의 공차라는 점이 중요하다.

어떤 수열 $\{b_n\}$이 **등차수열인지 판별**하고 싶다면 **해당 식이 상수 또는 n에 관한 일차식에 해당하는지 관찰하면 된다.** 둘 중 어느 것에도 해당하지 않는다면 수열 $\{b_n\}$은 등차수열이 아니다. 일반항이 상수인 수열도 등차수열임을 주의하자.

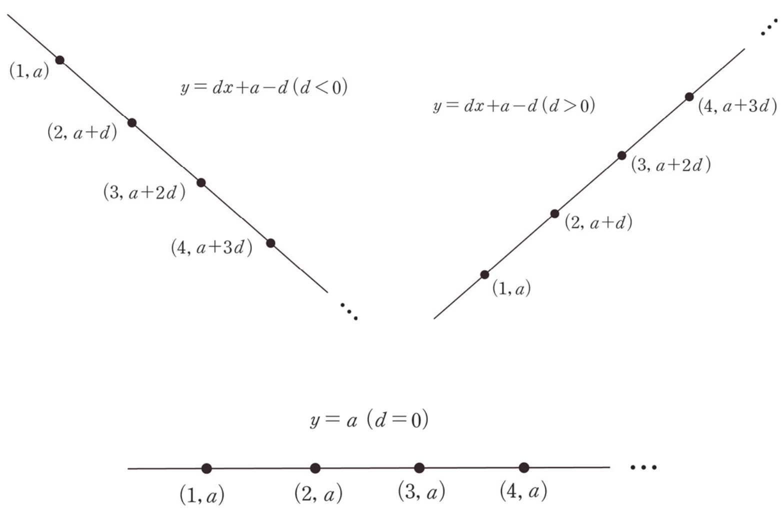
(3) 등차수열과 함수의 관계

첫째항이 a이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = a+(n-1)d\,(n=1, 2, 3, \cdots)$에서 a_n을 n에 관해 정리하면 $a_n = dn + a - d$이다.

이때, $f(x) = dx + a - d$에 대하여 $a_n = f(n)$이라 하면

등차수열 $\{a_n\}$의 항은 직선 $y = dx + a - d$ 위의 x좌표가 자연수인 점들의 y좌표와 같다.
이때, 직선 $y = dx + a - d$의 기울기 d는 $\{a_n\}$의 공차와 같다는 점이 포인트다.

d의 부호에 따라 직선 $y = dx + a - d$ 위의 x좌표가 자연수인 점들을 관찰하면 쉽게 이해할 수 있다.



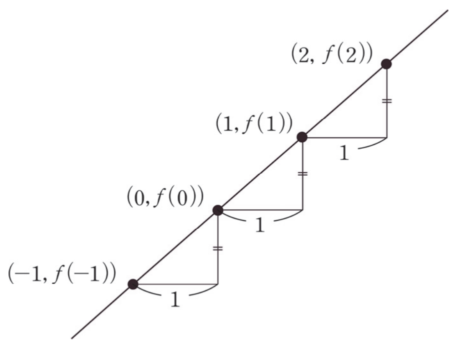
아래 예제는 수학II 내용이 주를 이루지만, 등차수열과 관련하여 중요한 포인트를 담고 있다.

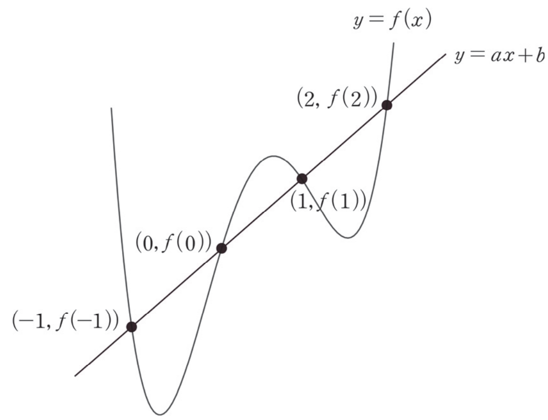
예제(1) 20학년도 9월 평가원 나형 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다. $f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

1. 순서대로 등차수열을 이루는 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 x좌표 -1, 0, 1, 2 또한 이 순서대로 등차수열을 이루므로
네 점 $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$는 모두 한 직선 위에 존재한다.

그림으로 이해해도 좋고, 수식으로 이해해도 좋다. $f(0)-f(-1)=f(1)-f(0)=f(2)-f(1)$에 의하여 $\dfrac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$이다.





네 점 $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$을 모두 지나가는 직선 l의 방정식을 $y=ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하자.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=ax+b$는 서로 다른 네 점 $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$, $(1, f(1))$, $(2, f(2))$에서 만나므로 **차이함수**를 이용하면
$f(x)-(ax+b)=x(x+1)(x-1)(x-2)$이다.

2. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다. 그래프 특성을 이용하고 싶지만 그래프 특성으로 해결하기는 어려워 보인다. **정직하게 두 접선의 방정식을 구한 다음** $(k, 0)$**을 대입**하자. (무작정 조건을 식으로 표현하기보다 그래프 특성을 이용하려는 시도 자체가 중요하다.)

$f(x)-(ax+b)=x(x+1)(x-1)(x-2)$에서 $f(-1)=-a+b$, $f(2)=2a+b$

$f'(x)-a=(x+1)(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)+x(x+1)(x-2)+x(x+1)(x-1)$에서
$f'(-1)=a-6$, $f'(2)=a+6$

※ 해설을 위해 $f(x)-(ax+b)=x(x+1)(x-1)(x-2)$의 양변을 x에 대하여 일일이 미분했지만, 실전에서는 곱의 미분의 특성을 바로 이용하면 된다.
$f'(x)-a=(x+1)(x-1)(x-2)+x(x-1)(x-2)+x(x+1)(x-2)+x(x+1)(x+2)$
에 $x=-1$을 대입하면 $(x+1)$을 인수로 갖는 항은 모두 사라지므로 $x(x-1)(x-2)$에만 $x=-1$을 대입하면 된다.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선의 방정식 : $y=(a-6)(x+1)-a+b$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선의 방정식 : $y=(a+6)(x-2)+2a+b$

두 접선이 모두 점 $(k, 0)$을 지나므로

$0=(a-6)(k+1)-a+b$, $0=ak-6k-6+b$, $6(k+1)=ak+b$ ⋯ ㉠
$0=(a+6)(k-2)+2a+b$, $0=ak+6k-12+b$, $6(-k+2)=ak+b$ ⋯ ㉡

$6(k+1)=6(-k+2)$이므로
$6k+6=-6k+12$, $12k=6$
$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

3. a, b의 값을 구하려면 한 가지 조건이 더 필요하다. $f(2k)=20$을 이용하자.

$f(2k)=f(1)=20$이므로 $f(x)-(ax+b)=x(x+1)(x-1)(x-2)$에서
$f(1)=a+b=20$

㉠에 $k=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 $9=\dfrac{1}{2}a+b$

$a+b=20$와 $9=\dfrac{1}{2}a+b$를 연립하면 $a=22$, $b=-2$

따라서 $f(x)=x(x+1)(x-1)(x-2)+22x-2$이므로 $f(4k)=f(2)=22\times2-2=42$

답은 42**!!**

comment

등차수열과 직선을 연관 짓는 아이디어가 있다면 30번 문항치고는 무난한 문항이지만 사전에 등차수열과 직선을 연결지을 수 있다는 점을 배우지 않은 학생들은 실전에서 이를 생각하기 어려울 수 있다.

평가원은 발상적인 풀이가 유일한 풀이가 되도록 문제를 설계하지 않는다.
(등차수열과 직선을 연결짓는 게 발상이라는 것은 논쟁의 여지가 있다. 알아두긴 해야 한다.)

이 문항도 다른 방법으로 풀 수 있는데, 어떤 방법일지 고민해보고 다음 페이지를 보자.

〈네 점을 지나가는 직선을 떠올리지 못했을 때의 풀이〉

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다는 것에서 그래프 특징을 발견하기는 어렵다. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 일반식을 작성하여 **$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값을 일일이 식으로 나타내자.**

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 일반식을 작성하면,
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (단, a, b, c, d는 상수)

$f(-1)=1-a+b-c+d$
$f(0)=d$
$f(1)=1+a+b+c+d$
$f(2)=16+8a+4b+2c+d$

네 개의 값이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $f(0)-f(-1)=f(1)-f(0)=f(2)-f(1)$
$-1+a-b+c=1+a+b+c=15+7a+3b+c$ 모든 변에서 c를 빼면,
$-1+a-b=1+a+b=15+7a+3b$

$-1+a-b=1+a+b$에서 $2b=-2$ $\therefore b=-1$

$1+a+b=15+7a+3b$에 $b=-1$을 대입하면 $a=12+7a$, $6a=-12$ $\therefore a=-2$
c를 구할 수는 없으므로 $f(x)=x^4-2x^3-x^2+cx+d$

본 해설에서는 등차수열과 직선의 관계에 착안하여
$f(x)-(ax+b)=x(x+1)(x-1)(x-2)$을 얻었고,

여기서는 사차함수의 일반식 설정, 대입으로 $f(x)=x^4-2x^3-x^2+cx+d$을 얻었다.

두 식 모두 2개의 미지수를 가지므로 이후의 풀이는 같다. 두 풀이 모두 알아두자.

예제(2) 21년 7월 교육청 21번

공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 \le d$
(나) 어떤 자연수 $k(k \ge 3)$에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$90 \le a_{16} \le 100$일 때, a_{20}의 값을 구하시오. [4점]

1. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자. 조건 (나)에서 등비중항을 활용하면 ${a_k}^2 = a_2 a_{3k-1}$ 이므로

$\{a+(k-1)d\}^2 = (a+d)\{a+(3k-2)d\}$ 에서

$a^2 + 2ad(k-1) + (k-1)^2 d^2 = a^2 + ad(3k-1) + (3k-2)d^2$ 이므로

$(k^2 - 5k + 3)d = a(k+1)$ 이다.

$a_{16} = a + 15d$ 에서 $0 < a \le d$ 이므로 $15d < a_{16} \le 16d$ 이다.

$90 \le a_{16} \le 100$ 이므로 자연수 d 의 값은 6 이다.

2. $6(k^2 - 5k + 3) = a(k+1)$ 을 **만족시키는** $1 \le a \le 6$**인 자연수** a**와** $k \ge 3$**인 자연수** k**의 값을 구하자. 이때, 3가지의 풀이가 존재하는데 가장 간단한 방법은 다항식의 나눗셈을 이용하는 것이다.**

$6(k^2 - 5k + 3) = a(k+1)$, $\dfrac{6(k^2 - 5k + 3)}{k+1} = a$

$k^2 - 5k + 3 = (k+1)(k-6) + 9$이므로 $6\left(k - 6 + \dfrac{9}{k+1}\right) = a$, $6k - 36 + \dfrac{54}{k+1} = a$

a는 자연수이므로 $k+1$은 54의 약수이다.

$k = 5$일 때, $a = 30 - 36 + 9 = 3$ (O)

$k = 8, 17, 26, 53$일 때, $a > 6$이므로 조건을 만족시키지 못한다. (X)

3. 따라서 $a = 3, k = 5$이므로 $a_{20} = a + 19d = 3 + 114 = 117$ 이다. **답은 117!!**

※다른 풀이 – k에 대한 이차방정식

a의 경우의 수가 6가지이므로 a**를 기준으로 개수를 세되, 〈Chapter 3〉에서 배운 table 그리기**를 활용하자. $6(k^2 - 5k + 3) = a(k+1)$ 를 k**에 대한 이차방정식**으로 정리하면

$6k^2 - (30+a)k + 18 - a = 0$이다.

a	$6k^2 - (30+a)k + 18 - a = 0$	k
1	$6k^2 - 31k + 17 = 0,$	$\dfrac{31 \pm \sqrt{553}}{12}$
2	$3k^2 - 16k + 8 = 0$	$\dfrac{8 \pm 2\sqrt{10}}{3}$
3	$2k^2 - 11k + 5 = 0$ $(2k-1)(k-5) = 0$	$\dfrac{1}{2}, 5$
4	$3k^2 - 17k + 7 = 0$	$\dfrac{17 \pm \sqrt{205}}{6}$
5	$6k^2 - 35k + 13 = 0$	$\dfrac{35 \pm \sqrt{913}}{12}$
6	$k^2 - 6k + 2 = 0$	$3 \pm \sqrt{7}$

따라서 $a = 3,\ k = 5$이다.

※ 다른 풀이 - 부등식

$(k^2-5k+3)d = a(k+1)$ 에서

등차수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 자연수이므로 $1 \le a \le d$이고,

$a(k+1) > 0$**이므로** $k+1 \ge k^2-5k+3 > 0$ **이다.**

$k^2-5k+3>0$ 에서 $k > \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ 또는 $k < \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$

$k^2-6k+2 \le 0$ 에서 $3-\sqrt{7} \le k \le 3+\sqrt{7}$ 이다.

따라서 $\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}(=4.\cdots) < k \le 3+\sqrt{7}(=5.\cdots)$이므로 자연수 k의 값은 5이다.

comment

1. 등차수열 예제이지만 이 문제의 핵심은 등차수열이 아니라
   조건 (나)에서 $6(k^2-5k+3) = a(k+1)$ 를 도출하고, 이 등식을 만족시키는 자연수 a, k의 값을 구하는 것이다. 실전에서는 사고가 명확하지 않으면 이런 문제에서 노가다를 하느라 시간을 많이 잡아먹을 수 있고 복병이 될 수도 있다.

2. 세 가지 풀이 모두 중요하다. 부등식을 이용하여 $k=5$를 바로 찾아내는 풀이는 실전에서 생각하기는 어렵지만 사고의 확장을 위해 알아두면 좋은 풀이이다.

2. 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

b가 a, c의 등차중항이면 $b-a=c-b=$(공차)이므로 $2b=a+c$, $b=\dfrac{a+c}{2}$가 성립한다.

이때, $\dfrac{a+c}{2}$는 a와 c의 평균이므로 **b를 a, c의 평균으로 해석하자.**

등차수열의 가장 중요한 특징은 등차중항이다. 등차수열의 일반항이 간단하다는 이유로 등차수열 문제를 볼 때마다 일반항부터 작성하여 문제 속 조건을 대입하여 푸는 학생들이 많은데 이제부터는 그 습관을 버리자.

등차중항을 이용하면 계산이 수월해지므로 등차수열 문제를 본다면 일반항이 아닌 등차중항부터 생각해야 한다.
등차중항으로 문제를 풀기 어려운 경우에만 일반항을 작성하면 된다.

등차중항과 관련된 팁을 주자면, **순서대로 등차수열을 이루는 세 개의 수**는 $a, a+d, a+2d$로 표현하기보다 $a-d, a, a+d$로 표현하자. 이 경우 세 수의 합은 $3a$가 된다.
순서대로 등차수열을 이루는 네 개의 수는 $a-3k, a-k, a+k, a+3k$로 표현하자. 이 경우 네 수의 합은 $4a$가 된다. 등차수열에서는 이처럼 중심을 먼저 고려하는 습관이 중요하다.

※ 등차수열에서 합(혹은 평균)이 같은 쌍들

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=a_4+a_{n-3}=\cdots$

자연수 p, q에 대해 등차수열 $\{a_n\}$의 항 a_p와 a_q가 있을 때,
$p+q$의 값이 같은 (a_p, a_q) 쌍에 대해 a_p+a_q의 값(혹은 a_p와 a_q의 평균)은 일정하다.

첫째항이 a이고, 공차가 d인 등차수열의 일반항을 이용하여 바로 증명할 수 있다.
$a_p=a+(p-1)d$, $a_q=a+(q-1)d$이므로 $a_p+a_q=2a+(p+q-2)d$

이때, a, d는 상수이므로 $p+q$가 상수라면 a_p+a_q의 값은 상수가 된다.

등차수열에서 '합이 같은 쌍'은 '등차중항'과 더불어 등차수열 문제에서 계산을 줄일 수 있는 강력한 도구이므로 반드시 숙지하자. 이 도구를 이용하면 다음과 같은 문제의 답을 빠르게 구할 수 있다.

예시 12년 3월 교육청 나형 22번

등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=4$, $a_2+a_3=17$일 때, a_4의 값을 구하시오. [3점]

→ $a_2+a_3=a_1+a_4$이므로 $17=4+a_4$, $a_4=13$이다. **답은 13!!**

3. 등차수열의 합

(1) 등차수열의 합의 원리

등차수열의 합 공식을 모르는 학생은 거의 없을 것이다.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n(a+l)}{2}$$

그러나 **이를 제대로 이해하고 있는 학생은 많지 않다.** 대부분 두 개의 등차수열의 합 공식을 **독립적인 공식**으로 인식하고, 등차수열의 합을 구할 때 **둘 중 하나의 공식에 값을 대입하는 식으로 문제를 푸는데** 이러면 수능 수학이 추구하는 자유로운 사고로부터 멀어진다.

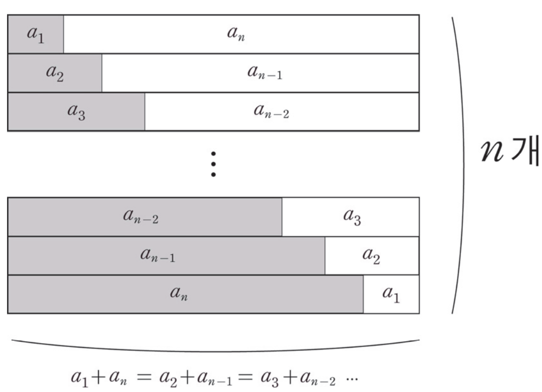
이제부터 등차수열의 합은 다음의 공식으로 이해하자.

$$S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(a_2+a_{n-1})}{2} = \frac{n(a_3+a_{n-2})}{2} = \cdots$$

가장 기본이 되는 형태는 $S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$**이고, (첫째항과 끝항의 평균)×(항의 개수)로 이해**하면 된다.

$S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \dfrac{n\{a+a+(n-1)d\}}{2} = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$이므로 $S_n = \dfrac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$**도 독립적으로 외우는 것이 아니라 이러한 관점에서 자연스럽게 이해**할 수 있어야 한다.

이전 페이지에서 알아봤듯이 $a_1+a_n = a_2+a_{n-1} = a_3+a_{n-2} = a_4+a_{n-3} = \cdots$이므로 $\dfrac{n(a_1+a_n)}{2} = \dfrac{n(a_2+a_{n-1})}{2} = \dfrac{n(a_3+a_{n-2})}{2} = \cdots$ 이다. 아래의 그림과 함께 이해하자.



따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 a_1부터 a_n까지의 합을 구할 때, **문제 상황에 따라 주어진 수열에서 $(a_1, a_n), (a_2, a_{n-1}), (a_3, a_{n-2}), \cdots$ 중 아무 쌍이나 하나를 선택해서 합을 구하면 된다.**

단순히 등차수열의 합 공식을 외운 학생과, 등차수열의 합 공식의 원리를 이해한 학생은 풀이 속도에서 유의미한 차이를 가져온다. 등차수열의 합의 원리를 이해했다면 다음의 문제들은 손쉽게 답을 구해야 한다.

예시 15학년도 9월 평가원 A형 24번

등차수열 a_n에 대하여 $a_1 + a_{10} = 22$일 때 $\sum_{k=2}^{9} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=2}^{9} a_k = \frac{8(a_2+a_9)}{2} = \frac{8(a_1+a_{10})}{2} = 4 \times 22 = 88$$이다.

답은 88**!!**

예시 11학년도 6월 평가원 나형 6번

1과 2사이에 n개의 수를 넣어 만든 등차수열

$$1,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 2$$

의 합이 24일 때, n의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

첫째항은 1, 끝항은 2, 항의 개수는 $n+2$이므로 $\frac{3(n+2)}{2} = 24$, $n+2 = 16$, $n = 14$이다.

답은 ④!!

예제(3) 20년 3월 교육청 나형 17번

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_3 = 42$일 때, 다음 조건을 만족시키는 4 이상의 자연수 k의 값은? [4점]

(가) $a_{k-3} + a_{k-1} = -24$

(나) $S_k = k^2$

① 13　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 17

1. 등차수열의 일반항 $a+(n-1)d$는 두 개의 미지수 a, d를 포함하고, 문제 속에서 새로운 미지수 k가 등장했다. 즉, 미지수는 3개다.

이때, **세 개의 미지수** a, d, k에 관한 **서로 다른 세 개의 식** $a_3=42$, $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$, $S_k=k^2$이 있으므로 일반항에 적절히 숫자를 대입한 다음 세 개의 식을 연립하면 a, d, k**의 값을 모두 구할 수 있다.**

그러나 이러한 풀이는 계산이 상당히 복잡하고, 누가 봐도 출제 의도와는 거리가 먼 풀이이다. **등차수열의 합에서 배운 도구**를 활용하자.

2. $S_k=\dfrac{k(a_1+a_k)}{2}=\dfrac{k(a_2+a_{k-1})}{2}=\dfrac{k(a_3+a_{k-2})}{2}=\dfrac{k(a_4+a_{k-3})}{2}=\cdots=k^2$

문제에서 주어진 항은 $a_3=42$이므로 $S_k=\dfrac{k(a_3+a_{k-2})}{2}=k^2$을 이용하자.

이때, 출제자에 감탄해야 한다. (가)에서 $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$이므로 등차중항에 의하여

$$\frac{a_{k-3}+a_{k-1}}{2}=a_{k-2}=-12$$

$a_3=42$, $a_{k-2}=-12$를 $\dfrac{k(a_3+a_{k-2})}{2}=k^2$**에 대입하자.**

$$\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}=\frac{k(42-12)}{2}=k^2$$

$15k=k^2$에서 양변을 k로 나누면 $(\because k\geq 4)$

$15=k$

답은 ③!!

comment

정말 잘 만든 문항이다. **'등차수열의 합의 원리를 생각하고 접근하는 학생'과 '아무 생각 없이 일반항을 작성한 뒤 대입, 계산으로 접근하는 학생'** 사이에 엄청난 풀이 시간의 차이를 만들어내기 때문이다.

지금까지 배운 내용을 바탕으로 준킬러 문항을 풀어보자.

예제(4) 20학년도 사관 나형 29번

수열 $\{a_n\}$은 a_1이 자연수이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - d & (a_n \geq 0) \\ a_n + d & (a_n < 0) \end{cases} \quad (d\text{는 자연수})$$

이다. $a_n < 0$인 자연수 n의 최솟값을 m이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 3$

(나) $a_1 + a_{m-1} = -9(a_m + a_{m+1})$

(다) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} a_k = 45$

a_1의 값을 구하시오. (단, $m \geq 3$) [4점]

1. 수열 $\{a_n\}$은 양수인 항에 대해 d만큼 빼고, 음수인 항에 대해 d만큼 더하는 수열이다.

이때, $a_n < 0$인 자연수 n의 최솟값이 m이므로 a_m **이 처음으로 음수가 되는 항**이다.
즉, 수열 $\{a_n\}$의 정의에 의해 m**개의 항으로 구성된 수열** $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{m-1}, a_m$**은 첫째항이** a_1**이고 공차가** $-d$**인 등차수열**이다.

2. 박스 안 조건을 따져보자. 우선 (가)에서 $a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=3$이고, a_{m-1}은 a_{m-2}와 a_m의 등차중항이므로 $a_{m-1}=1$이다.

다음으로 (나)에서 $a_1+a_{m-1}=-9(a_m+a_{m+1})$이고, (다)에서 $\sum_{k=1}^{m-1} a_k=45$이다.
$\sum_{k=1}^{m-1} a_k=\dfrac{(m-1)(a_1+a_{m-1})}{2}=45$이므로 $a_1+a_{m-1}=\dfrac{90}{m-1}$이다.

$a_1+a_{m-1}=\dfrac{90}{m-1}$을 $a_1+a_{m-1}=-9(a_m+a_{m+1})$에 대입하면 $\dfrac{90}{m-1}=-9(a_m+a_{m+1})$

$a_m=a_{m-1}-d=1-d$
$a_{m+1}=a_m+d=1$ ($\because a_m<0$)이므로

$\dfrac{90}{m-1}=-9(1-d+1)$
$-10=(m-1)(2-d)$
$\therefore (m-1)(d-2)=10$

3. $(m-1)(d-2)=10$**을 만족시키는** m, d**의 값을 구하려면 한 가지 식이 더 필요하다.**
$a_1+a_{m-1}=\dfrac{90}{m-1}$**를 마저 이용하자.**

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{m-1}, a_m$은 첫째항이 a_1, 공차가 $-d$인 등차수열이고 $a_{m-1}=1$이다.
즉, $a_{m-1}=a_1-(m-2)d=1$이므로 $a_1=1+(m-2)d$이다.

따라서 $a_1+a_{m-1}=\dfrac{90}{m-1}$에서
$\{1+(m-2)d\}+1=-9\{(1-d)+1\}$
$2+(m-2)d=-9(2-d)$
$(m-11)d=-20$
$\therefore d=\dfrac{20}{11-m}$

4. $d=\dfrac{20}{11-m}$를 $(m-1)(d-2)=10$에 대입하여 m, d의 값을 구하자.

$$(m-1)\left(\frac{20}{11-m}-2\right)=10$$
$$(m-1)\{20-2(11-m)\}=10(11-m)$$
$$(m-1)(m-1)=5(11-m)$$

$$m^2-2m+1=55-5m$$
$$m^2+3m-54=0$$
$$(m-6)(m+9)=0$$

$\therefore m=6$ 또는 $m=-9$

m은 자연수이므로 $m=6$, $d=\dfrac{20}{11-6}=4$
따라서 $a_1=1+(m-2)d=1+(6-2)4=17$이다.

답은 17!!

comment

1. 수열 $\{a_n\}$이 어떤 수열인지 파악한 다음, a_1부터 a_m까지는 공차가 $-d$인 등차수열임을 파악한다.
2. 등차중항을 이용하여 a_{m-1}의 값을 구한다.
3. 미지수의 개수는 m, d 두 개이므로 (나) 식과 (다) 식을 연립하여 m, d의 값을 구한다. 이때, 해설처럼 $\sum_{k=1}^{m-1}a_k=\dfrac{(m-1)(a_1+a_{m-1})}{2}=45$을 이용하면 계산이 비교적 간단해진다.

예제(5) 20년 7월 교육청 나형 21번

첫째항이 양수이고 공차가 -1 보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 수열 $\{b_n\}$ 은 다음과 같다.

$$b_n = \begin{cases} a_{n+1} - \dfrac{n}{2} & (a_n \geq 0) \\ a_n + \dfrac{n}{2} & (a_n < 0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5 < b_6$
(나) $S_5 = S_9 = 0$

$S_n \leq -70$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은? [4점]

① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

1. 조건 (가)를 해석하기 위해 $b_6 - b_5$를 조사해보자.

(1) $a_5 \geq 0$, $a_6 \geq 0$일 때

$b_6 - b_5 = (a_7 - 3) - \left(a_6 - \frac{5}{2}\right) = a_7 - a_6 - \frac{1}{2} < 0$이다.

따라서 $b_6 < b_5$가 되어 모순이다.

(2) $a_5 < 0$, $a_6 < 0$일 때

$b_6 - b_5 = (a_6 + 3) - \left(a_5 + \frac{5}{2}\right) = a_6 - a_5 + \frac{1}{2} < 0$이다.

따라서 $b_6 < b_5$가 되어 모순이다.

수열 $\{a_n\}$은 공차가 음수이므로 (1), (2)에 의하여 $a_5 \geq 0$, $a_6 < 0$이다.

따라서 $1 \leq n \leq 5$에서 $b_n = a_{n+1} - \frac{n}{2}$이고, $n \geq 6$에서 $b_n = a_n + \frac{n}{2}$이다.

2. S_5를 계산해보자. $1 \leq n \leq 5$에서 $\{b_n\}$은 등차수열이므로 등차수열의 합 공식과 등차중항을 적절히 활용하면 $S_5 = \frac{5}{2}(b_1 + b_5) = \frac{5}{2} \times 2b_3 = 0$을 얻는다. 따라서 $b_3 = 0$이다.

$b_3 = a_4 - \frac{3}{2} = 0$이므로 $a_4 = \frac{3}{2}$이다.

S_9를 계산해보자. $S_9 = S_9 - S_5 = b_6 + b_7 + b_8 + b_9$이다.
$n \geq 6$에서 $\{b_n\}$은 등차수열이므로 등차수열의 합 공식을 적절히 활용하자.

$S_9 = b_6 + b_7 + b_8 + b_9 = \frac{4}{2}(b_6 + b_9) = 0$을 얻는다. 따라서 $b_6 + b_9 = 0$이다.

$b_6 + b_9 = a_6 + \frac{6}{2} + a_9 + \frac{9}{2} = a_6 + a_9 + \frac{15}{2} = 0$이다.

3. 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_4 = a_1 + 3d = \frac{3}{2}$

$a_6 + a_9 = 2a_1 + 13d = -\frac{15}{2}$ 이다.

따라서 $2a_1 + 13d - 2(a_1 + 3d) = 7d = -\frac{15}{2} - 3 = -\frac{21}{2}$이므로 $d = -\frac{3}{2}$, $a_1 = 6$이고,

$a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{15}{2}$이다.

4. 이제 n의 최솟값을 구해보자. $S_n = S_n - S_9 = \sum_{k=10}^{n} b_k = \frac{1}{2}(n-9)(b_{10}+b_n) \leq -70$에서

$b_{10} = a_{10} + \frac{10}{2} = -\frac{5}{2}$, $b_n = a_n + \frac{n}{2} = -\frac{3}{2}n + \frac{15}{2} + \frac{n}{2} = -n + \frac{15}{2}$이므로

$S_n = \frac{1}{2}(n-9)\left(-\frac{5}{2} - n + \frac{15}{2}\right) \leq -70$이다.

따라서 $(n-9)(n-5) \geq 140$에서 $n^2 - 14n - 95 = (n+5)(n-19) \geq 0$이다.

$n \geq 19$에서 n의 최솟값은 19이다.

답은 ④!!

comment

첫째항이 양수이고 공차가 음수인 등차수열은 기출 단골 소재이다. 이 수열은 어떤 자연수 k에 대하여 $1 \leq n \leq k$에서 $a_n \geq 0$이고 $n \geq k+1$에서 $a_n < 0$이다. 마찬가지로, 첫째항이 음수이고 공차가 양수인 등차수열은 어느 항까지는 음수이고 그 뒤로는 양수이다.

(2) 등차중항으로 구하는 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$의 값은 $\dfrac{5(a_3+a_7)}{2}=\dfrac{5(a_4+a_6)}{2}$이다.

이때, **'a_3과 a_7의 등차중항'과 'a_4와 a_6의 등차중항'은 모두 a_5이므로** $\dfrac{a_3+a_7}{2}=\dfrac{a_4+a_6}{2}=a_5$**이다.**

즉, $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5$이다. 이제부터는 중간과정을 모두 생략하고 **$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$을 보자마자 $5a_5$를 말할 수 있도록 연습**하자.

① $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값은 얼마인가? $5a_5$이다.
② $a_1+a_2+a_3$의 값은 얼마인가? $3a_2$이다.
③ $a_1+a_2+a_3+a_4$의 값은 얼마인가? a_2와 a_3의 등차중항이 존재하지 않으므로 $\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}$ 또는 $\dfrac{4(a_2+a_3)}{2}$으로 나타내는 수밖에 없다.
④ $a_1+a_3+a_5+a_7$의 값은 얼마인가? a_3과 a_5의 등차중항이 a_4이므로 $4a_4$이다.

다시 말하지만 등차수열에서 가장 중요한 것은 등차중항이고, **등차수열의 합을 구할 때도 등차중항을 통해 사고하는 것이 유용하다.**

(3) $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k+dn(q-p+1)=\sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ (단, p, q는 $q>p$인 자연수이고 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열)

공식을 외우려 하지 말고 이해하자. $a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q$가 $a_{p+n}+a_{p+n+1}+\cdots+a_{q+n}$이 되기 위한 조건을 생각하면 자연스럽게 이해할 수 있다.

$a_p+dn=a_{p+n}$
$a_{p+1}+dn=a_{p+n+1}$
$\vdots$
$a_q+dn=a_{q+n}$이므로
$a_p+a_{p+1}+\cdots+a_q+\{dn\times(q-p+1)\}=a_{p+n}+a_{p+n+1}+\cdots+a_{q+n}$이다.

시그마를 이용하여 예쁘게 정리하면 $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k+dn(p-q+1)=\sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$이다.

앞으로 **두 등차수열의 합이 있을 때 $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} a_k+dn(p-q+1)=\sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 성질을 이용할 수 있는지 확인**하자.

(4) 다항식으로 이해하는 등차수열의 합

첫째항이 a이고 공차가 d인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 S_n을 n에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{dn^2+(2a-d)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

즉, **S_n은 상수항이 0인 n에 관한 이차식이다.** 이를 인수의 관점으로 해석하면 **S_n은 n을 인수로 가진다.**
이 점을 바탕으로 등차수열의 합에 관한 기출 문제를 풀어보자.

예제(6) 09학년도 6월 평가원 나형 16번

공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_n T_n = n^2(n^2-1)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.
ㄴ. $d_1 d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

1. $a_n = n$이므로 $S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$이다. (혹은 첫째항이 1이고 공차가 1인 등차수열의 합을 구하면 된다.)

$S_n T_n = n^2(n^2-1)$이므로 $T_n = 2n(n-1)$이다.

① 선지 (ㄱ)에서 $b_n = 4n-4$이라 했으므로 $\sum_{k=1}^{n}(4k-4) = 2n(n-1)$**이 성립하는지 확인**해도 좋고,

② **수열의 합과 일반항 사이의 관계**를 이용하여 $T_1 = b_1 = 0$, $T_n - T_{n-1} = b_n \ (n \geq 2)$을 구해도 좋다.

① $\sum_{k=1}^{n}(4k-4) = 4\sum_{k=1}^{n} k - 4n = 4 \times \frac{n(n+1)}{2} - 4n = 2n(n-1)$

② $b_n = T_n - T_{n-1} = 2n(n-1) - 2(n-1)(n-2) = 2(n-1)\{n-(n-2)\} = 4n-4 \ (n \geq 2)$
이때, $4 \times 1 - 4 = 0$이므로 $b_n = 4n-4 \ (n \geq 1)$ (O)

2. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 a, b라 할 때 S_n, T_n은 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d_1\}}{2}, \quad T_n = \frac{n\{2b+(n-1)d_2\}}{2}$$

$S_n T_n = n^2(n^2-1)$이므로 위의 두 식을 서로 곱한 다음 **계수 비교법을 적용**하자.

$$\frac{n^2\{2a+(n-1)d_1\}\{2b+(n-1)d_2\}}{4} = n^2(n^2-1)$$

궁금한 것은 $d_1 d_2$의 값이므로 좌변의 식을 전개할 필요 없이 좌변의 식을 전개했을 때 나오는 하나의 항과 그에 대응하는 우변의 항을 비교하면 된다. **최고차항을 비교**하자.

(좌변의 최고차항)$= \frac{d_1 d_2}{4} n^4$
(우변의 최고차항)$= n^4$

좌·우변의 최고차항이 서로 같으므로 $\frac{d_1 d_2}{4} = 1$, $d_1 d_2 = 4$ (O)

3. (ㄷ)은 등차수열의 합 공식과 인수의 관점으로 풀어야 한다. 먼저, 등차수열의 합은 상수항이 없는 n에 관한 이차식이다. 즉, **등차수열의 합은 반드시 n을 인수로 갖는다.**

$S_nT_n = n^2(n^2-1)$이고, S_n, T_n은 모두 등차수열의 합이므로 이차식이다. **따라서 S_n, T_n은 4개의 인수 $n, n, n+1, n-1$ 중 두 개씩을 나눠 갖는다.** 만약 S_n, T_n 중 하나라도 4개의 인수 중 두 개를 갖지 않는다면 S_n, T_n 모두 이차식이 아니게 된다.

등차수열의 합은 반드시 n을 인수로 가지므로 S_n, T_n**은 각각 n을 인수로 갖는다.** 따라서 남은 두 인수 $n+1, n-1$ 중 하나는 S_n이 갖고, 남은 하나는 T_n이 갖는다.

그런데 **$a_1 \neq 0$이면 $S_1 \neq 0$이므로 인수정리에 의해 S_n은 $(n-1)$을 인수로 갖지 않는다.** 따라서 S_n은 $n, n+1$을 인수로 가지므로 $S_n = kn(n+1)$ (단, k는 0이 아닌 실수)

$a_n = S_n - S_{n-1} = kn(n+1) - k(n-1)n$
$= kn^2 + kn - kn^2 + kn = 2kn \ (n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 2k$이므로 $a_n = 2kn$

이때, 'a_n, b_n이 등차수열, $S_nT_n = n^2(n^2-1)$' 이외의 조건이 없으므로 k는 0이 아닌 모든 실수가 가능하다. $k \neq \frac{1}{2}$이면 $a_n \neq n$이다. 즉, $a_1 \neq 0$이라고 해서 반드시 $a_n = n$인 것은 아니다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이므로 답은 ③!!

※ 선지 (ㄷ)은 대우 명제를 통해서도 풀 수 있다.

'$a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.' (명제)
'$a_n \neq n$이면 $a_1 = 0$이다.' (대우 명제)

대우 명제인 '$a_n \neq n$이면 $a_1 = 0$이다.'가 참이면 기존 명제도 참이고, 대우 명제가 거짓이면 기존 명제도 거짓이다. $a_n = n$일 때 $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$이므로 $a_n \neq n$일 때 $S_n \neq \frac{n(n+1)}{2}$이다.

따라서 $S_n \neq \frac{n(n+1)}{2}$일 때 $a_1 = S_1 = 0$인지 따지면 된다.

$S_n = \frac{n(n+1)}{p}$ $(p \neq 2)$일 때 $a_1 = S_1 \neq 0$이므로 반례가 존재한다. 즉, 대우 명제가 거짓이므로 명제 (ㄷ)도 거짓이다. (X)

(5) 상수항이 0이 아닌 n에 관한 이차식

이렇게 해서 등차수열의 합 S_n이 상수항이 0인 n에 관한 이차식이라는 것을 알아보았다. 그렇다면 **상수항이 0이 아닌 n에 관한 이차식은 무엇을 의미할까?**

결론부터 말하자면 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,
'$S_n = an^2 + bn + c\,(c \neq 0)$'와 '수열 $\{a_n\}$이 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.'는 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건이다. 다음 문제를 풀어보면서 그 이유를 생각해보자.

예제(7) 11년 10월 교육청 나형 30번

수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 3,\ a_n = 8n-4\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

를 만족시키고, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1. $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{S_{10}}$을 일일이 구하기는 매우 힘들므로 S_n의 식을 구하자.

$a_1=3$, $a_n=8n-4(n=2, 3, 4,\ \cdots)$이므로 **수열 $\{a_n\}$은 둘째 항부터 등차수열**을 이룬다.

$S_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(8k-4)=a_1+\sum_{k=1}^{n}(8k-4)-4$

($k=1$부터 정의된 시그마로 고쳤으니 $(8-4)$에 해당하는 값을 빼야 한다.)

$=-1+8\sum_{k=1}^{n}k-4n$

$=-1+4n(n+1)-4n=4n^2-1$

2. $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{21}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{20}{21}=\frac{10}{21}$

$p=21$, $q=10$이므로 $p+q=31$이다.

답은 31**!!**

그렇게 어려운 문항은 아니므로 답은 수월하게 맞힐 수 있다. 다음 페이지에서 이를 상수항이 0이 아닌 S_n과 연결지어보자.

이 문제에서 주목해야 할 것은 $S_n=4n^2-1$이다. 둘째 항부터 등차수열을 이루는 수열 $\{a_n\}$에 대해 S_n은 상수항이 0이 아닌 이차식이다.

하지만 **문제에서 주어진 수열 $\{a_n\}$에 한해 S_n이 우연히 상수항을 가졌을 가능성도 존재한다.** 미지수를 사용하여 다시 증명해보자.

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=a$, $a_n=bn-c(n=2, 3, 4, \cdots)$을 만족시키고 $a\neq b-c$일 때,
수열 $\{a_n\}$은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다. 이때, S_n은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}S_n=a_1+\sum_{k=2}^{n}(bk-c)&=a+\sum_{k=1}^{n}(bk-c)-(b-c)\\&=b\sum_{k=1}^{n}k-cn+a-(b-c)\\&=\frac{bn(n+1)}{2}-cn+a-(b-c)\end{aligned}$$

S_n의 상수항은 $a-(b-c)$이다. 그런데 $a\neq b-c$이므로 상수항은 0이 아니다.

그런데 위의 증명은
'수열 $\{a_n\}$이 둘째 항부터 등차수열을 이루면 $S_n=an^2+bn+c\,(c\neq 0)$이다.'가 참임을 증명한 것이므로 '$S_n=an^2+bn+c\,(c\neq 0)$'와 '수열 $\{a_n\}$은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.'가 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건임을 증명하기 위해서는

'$S_n=an^2+bn+c\,(c\neq 0)$이면 수열 $\{a_n\}$은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.'
도 참임을 증명해야 한다. 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하자.

$S_n=an^2+bn+c\,(c\neq 0)$일 때 $a_1=S_1$, $S_n-S_{n-1}=a_n\,(n\geq 2)$이다.

$$\begin{aligned}a_n=S_n-S_{n-1}&=an^2+bn+c-\{a(n-1)^2+b(n-1)+c\}\\&=an^2+bn+c-\{an^2+n(b-2a)+a-b+c\}\\&=2an-a+b\ (n\geq 2)\end{aligned}$$
$$a_1=S_1=a+b+c$$

이때, $a_n=2an-a+b$에 $n=1$을 대입한 값인 $a+b$와 $a_1=a+b+c$가 서로 다르므로 수열 $\{a_n\}$은 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.

따라서 **'$S_n=an^2+bn+c\,(c\neq 0)$'와 '수열 $\{a_n\}$이 둘째 항부터 등차수열을 이룬다.'는 서로가 참이 되기 위한 필요충분조건이다.**

(6) 함수로 이해하는 등차수열의 합

첫째항이 a이고 공차가 d인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 S_n을 n에 관해 정리하면 다음과 같다.

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{dn^2+(2a-d)n}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a - \frac{d}{2}\right)n$$

이를 함수와 연결지으면,

수열 $\{S_n\}$의 항은 원점을 지나고 최고차항의 계수가 $\frac{d}{2}$인 이차함수 $y = \frac{d}{2}x^2 + \left(a-\frac{d}{2}\right)x$ 위의 x좌표가 자연수인 점의 y좌표와 같다.

{등차수열}의 각 항이 **직선 위의 x좌표가 자연수인 점의 y좌표**와 같다면,
{등차수열의 합 수열}의 각 항은 **이차함수의 위의 x좌표가 자연수인 점의 y좌표**와 같다.

예제(8) 13년 3월 교육청 A형 30번

첫째항이 60 인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{T_n\}$을

$$T_n = |a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n|$$

이라 하자. 수열 $\{T_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $T_{19} < T_{20}$	(나) $T_{20} = T_{21}$

$T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [4점]

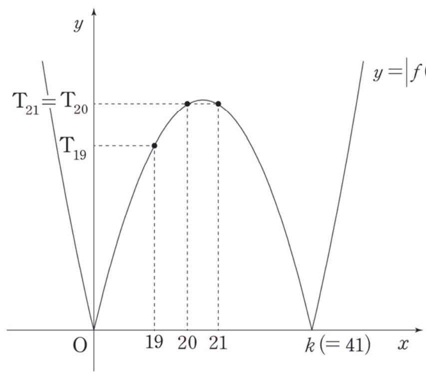
1. T_n**을 함수로 바라보자. 원점을 지나가는 어떤 이차함수** $f(x)$**에 대해** $a_1+a_2+\cdots+a_n=f(n)$**이라 할 수 있고 이때** $T_n=|f(n)|$**이다.**

$T_{19}<T_{20}$, $T_{20}=T_{21}$를 모두 만족시키는 $y=|f(x)|$의 그래프와 $x=20$, $x=21$의 위치를 좌표평면에 나타내자.

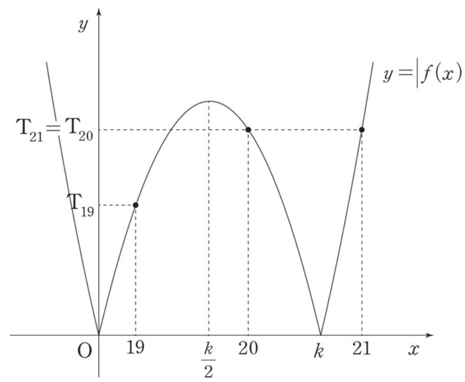
$y=|f(x)|$가 x축과 만나는 점의 0이 아닌 x좌표를 k라 할 때, **아래와 같이** $21<k$**인 경우와** $k<21$**인 경우가 가능하다.**

$21<k$일 때 이차함수 $y=f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{20+21}{2}=\frac{41}{2}=\frac{k}{2}$이므로 $k=41$이다.

(i) $21<k$

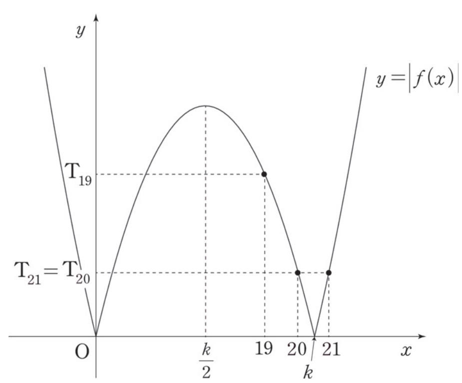


(ii) $k<21$



※ $T_n=f(n)$이라면 이차함수의 대칭성에 의하여 (i)만 가능하지만, $T_n=|f(n)|$이므로 (ii)와 같이 $k<21$인 경우도 가능함에 주의하자. ((ii)에서 20이 대칭축의 왼쪽에 있는 경우도 가능하다.)

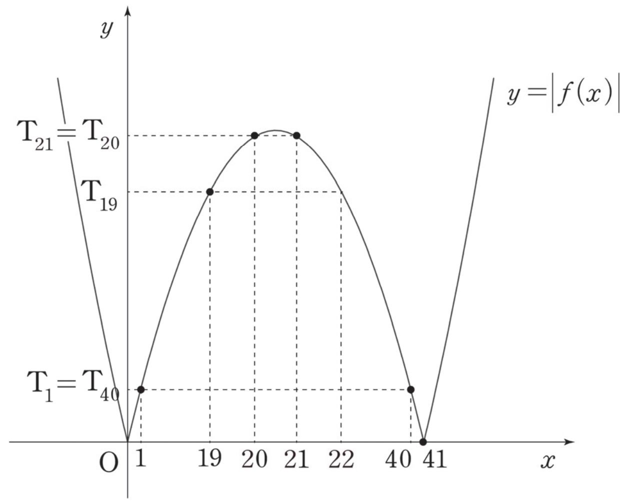
하지만 (ii) $k<21$**인 경우 모순이 발생**한다. $y=f(x)$의 대칭축은 $x=\frac{k}{2}<\frac{21}{2}=10.5$이므로 $T_{19}<T_{20}=T_{21}$을 만족시킬 수 없다. 즉, $k<21$**인 경우** $19, 20, 21$**은 모두 대칭축의 오른쪽에 존재해야 하므로** $T_{20}=T_{21}$**이라면 아래 그림과 같이** $T_{19}>T_{20}=T_{21}$**일 수밖에 없으므로 조건을 만족시키지 못한다.**



따라서 (i)이 답인 경우이다.

2. 함수 $y = |f(x)|$의 그래프는 $x = \frac{41}{2}$에 대하여 대칭이고 x축과 $x = 0$, $x = 41$에서 만난다.

$y = |f(x)|$**의 그래프 상에서** $T_n > T_{n+1}$**을 만족시키는** n**의 최솟값과 최댓값의 합을 구하자.**



$n \leq 19$일 때 $T_n < T_{n+1}$

$n = 20$일 때 $T_n = T_{n+1}$

$21 \leq n \leq 40$일 때 $T_n > T_{n+1}$

$41 \leq n$일 때 $T_n < T_{n+1}$

따라서 $T_n > T_{n+1}$을 만족시키는 n의 최솟값과 최댓값의 합은 $21 + 40 = 61$이다.

답은 61**!!**

comment

1. 등차수열의 합의 수열을 '이차함수'의 관점에서 해석하고, 각 항을 이차함수의 그래프 위의 점으로 파악해야 한다.

2. 그래프 해석을 하지 않는다면 식으로도 풀 수 있지만, 본 풀이보다 계산이 상당히 많아진다.

$T_n = \left| \frac{n\{2 \times 60 + (n-1)d\}}{2} \right|$로 일반항을 세운 다음 $T_{20} = T_{21}$을 통해 가능한 d의 두 가지 값을 구하고 각각의 경우에서 $n = 19, 20$을 대입하여 $T_{19} < T_{20}$을 만족시키는지 확인하면 된다. 각자 계산해보자.

등비수열

1. 등비수열의 정의, 판별, 함수와의 관계

(1) 정의

이웃하는 두 항 사이의 비(공비)가 일정한 수열을 등비수열이라 한다. 이름에서도 알 수 있듯이 등차는 ‘차가 일정’, 등비는 ‘비가 일정’하다는 것을 나타낸다.

첫째항이 a이고 공비가 r $(r \neq 0)$인 **등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n**은 다음과 같다.

$$a_n = ar^{n-1}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$$

이때, 첫째항이 a이고 공비가 r인 **등비수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의**는 다음과 같다. (단, $a \neq 0$, $r \neq 0$)

$a_1 = a$, $a_{n+1} = ra_n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ 혹은

$$a_1 = a,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = r\,(n=1, 2, 3, \cdots)$$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$은 $a_{n+1} = ra_n$에서 양변을 a_n으로 나눈 것뿐이지만, 실제 문제에서 만났을 때 헷갈리는 경우가 종종 있으므로 두 형태 모두 알아두자.

혹은 다음과 같이 등비중항을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$을 귀납적으로 정의할 수도 있다.

$a_1 = a$, $a_2 = ar$, $a_{n+2}a_n = (a_{n+1})^2\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ 혹은

$$a_1 = a,\ a_2 = ar,\ \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\,(n=1, 2, 3, \cdots)$$

(2) 등비수열의 판별

첫째항이 a이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = ar^{n-1}$에서 $r=1$**이면** $a_n = a$**이고,** $r \neq 1$**이면** a_n**은 밑이** r**인 지수 꼴이다.** 특히 n을 지수로 갖는 밑이 $\{a_n\}$의 공비라는 점이 중요하다.

어떤 수열 $\{b_n\}$이 **'등비수열'인지 판별**하고 싶다면 **해당 식이 상수 또는 지수 n에 관한 꼴에 해당하는지 관찰하면 된다.** 둘 중 어느 것에도 해당하지 않는다면 수열 $\{b_n\}$은 등비수열이 아니다.

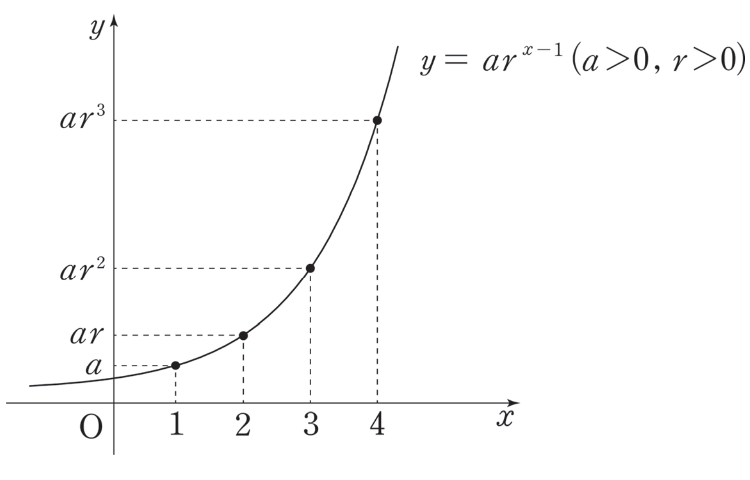
단, **일반항이 상수인 수열은 등차수열인 동시에 등비수열이라는 점을 주의**하자.

(3) 등비수열과 함수의 관계

일반항이 $a_n = ar^{n-1}$인 등비수열은 지수함수 $y = ar^{x-1}$와 연결지을 수 없다. 지수함수의 밑은 무조건 양수여야 하지만, 등비수열에서 공비는 양수가 아닐 수도 있기 때문이다.

단, $r>0$인 경우 일반항이 $a_n = ar^{n-1}$인 등비수열의 항은 지수함수 $y = ar^{x-1}$ 위의 x좌표가 자연수인 점들의 y좌표와 같다.

이는 지수함수의 정의역의 항들이 순서대로 등차수열을 이루는 경우, 정의역에 대응하는 치역의 원소들은 순서대로 등비수열을 이룬다는 점과도 연결된다.



※ 지수함수와 역함수 관계에 있는 로그함수의 정의역의 항들이 순서대로 등비수열을 이루는 경우, 정의역에 대응하는 치역의 원소들은 순서대로 등차수열을 이룬다.

(4) $\{a_n\}$이 등차, 등비수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

① $\{a_n\}$이 등차수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등차수열이 아니다. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$를 구하는 공식도 존재하지 않는다. **만약 등차수열 $\{a_n\}$에 관해 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$이 주어졌다면, 이를 해결하는 기막힌 공식은 없으므로 다른 조건과 연결지어 문제를 풀어나가야 한다.**

교육청에서 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$의 값을 물어본 적이 있으나 직접적인 값이 아니라 부등식을 만족시키는 n의 최댓값을 물어봤고, 출제 의도는 '대칭성'을 이용한 계산이었다. 이 문제는 수열의 합 파트에서 예제로 만나볼 것이다.

② 반면, $\{a_n\}$이 등비수열일 때 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 등비수열이다. $\{a_n\}$의 일반항이 ar^{n-1}일 때, $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 일반항은 $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$이기 때문이다. (단, $a \neq 0$, $r \neq 0$이다.)

◆ 2. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

b가 a, c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=$(공비)이므로 $b^2=ac$가 성립한다. a, b, c가 모두 양수이면 $b=\sqrt{ac}$으로 b를 a, c의 기하평균이라 할 수 있지만, 음수인 항이 포함된 경우 그러한 해석은 가능하지 않다.

등차중항만큼 중요하지는 않지만, 등비중항을 이용할 경우 계산이 간단해지는 문제도 많이 출제되므로 때에 따라 적절히 사용할 준비는 돼 있어야 한다.

※ 등비수열에서 곱이 같은 쌍들

등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1a_n = a_2a_{n-1} = a_3a_{n-2} = a_4a_{n-3} = \cdots$

자연수 p, q에 대해 등비수열 $\{a_n\}$의 항 a_p와 a_q가 있을 때, $p+q$의 값이 같은 (a_p, a_q) 쌍에 대해 a_pa_q의 값은 일정하다.

(증명)
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 $a_p = ar^{p-1}$, $a_q = ar^{q-1}$이므로 $a_pa_q = a^2r^{p+q-2}$이다.
이때, a, r은 상수이므로 $p+q$가 상수이면 a_pa_q도 상수이다.

예제(9) 12학년도 6월 평가원 나형 8번

등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 = \sqrt{5}$ 일 때, $a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5$ 의 값은? [3점]

① $\sqrt{5}$ ② 5 ③ $5\sqrt{5}$ ④ 25 ⑤ $25\sqrt{5}$

$a_1 \times a_5 = a_2 \times a_4 = (a_3)^2 = 5$이므로
$a_1 \times a_2 \times a_4 \times a_5 = 5 \times 5 = 25$이다.

답은 ④!!

예제(10) 05학년도 6월 평가원 나형 11번

다섯 개의 실수 a, b, c, d, e 를 적당히 배열하여 공비가 1보다 큰 등비수열을 만들었다. a, b, c, d, e 가 다음 조건을 만족시킬 때 b 가 이 수열의 제 n 항이라면, n 의 값은? [4점]

(가) $e = \sqrt{cd}$

(나) $\dfrac{a}{e} = \dfrac{c}{d}$

(다) $a < b$

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

1. (가) $e = \sqrt{cd}$ 에서 $e^2 = cd$이므로 **e는 c, d의 등비중항**이다.

 (나) $\dfrac{a}{e} = \dfrac{c}{d}$에서 $ad = ec$이다.

2. (가), (나)를 모두 만족시키는 a, d, c, e의 순서를 알아보자.

 우선, e는 c, d의 등비중항이므로 c, e, d**의 순서대로 등비수열**을 이루거나 d, e, c**의 순서대로 등비수열**을 이룬다.

 (ⅰ) c, e, d**의 순서대로 등비수열**을 이룰 때 $ad = ec$를 만족시키려면 a, c, e, d 순으로 등비수열을 이뤄야 한다.

 (ⅱ) d, e, c**의 순서대로 등비수열**을 이룰 때 $ad = ec$를 만족시키려면 d, e, c, a 순으로 등비수열을 이뤄야 한다.

 (다)에서 $a < b$이므로

 (ⅰ)에서 **a, c, e, d, b의 순서대로 등비수열**을 이루거나
 (ⅱ)에서 **d, e, c, a, b의 순서대로 등비수열**을 이룬다.

 어느 쪽을 택하든 b는 이 수열의 제5항이므로 $n = 5$이다.

답은 ⑤!!

comment

c, e, d**의 순서대로 등비수열**을 이룰 때 $ad = ec$를 만족시키려면 a, c, e, d 순으로 등비수열을 이뤄야 한다는 것을 잘 이해하자. '등차수열'에서는 '합이 같은 쌍'이 중요하고, '등비수열'에서는 '곱이 같은 쌍'이 중요하다.

2. 등비수열의 합

(1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 다음과 같다.

(ⅰ) $r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(ⅱ) $r=1$일 때, $S_n = na$

저자는 $r<1$이면 $\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$을 이용하고 $r>1$이면 $\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$을 이용하는 편이다. 크게 중요한 것은 아니다.
또한, 일반적으로 $r \neq 1$이지만 $r=1$인 경우도 등장할 수 있으므로 가능성을 배제하지 말자!

(2) $S_n = a+ar+ar^2+ \cdots +ar^{n-1} = a(1+r+r^2+ \cdots +r^{n-1})$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 때 항상 $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$을 이용해야 하는 것은 아니다.
$S_n = a+ar+ar^2+ \cdots +ar^{n-1} = a(1+r+r^2+ \cdots +r^{n-1})$으로 항을 나열하여 수열의 합을 표현할 수도 있다.

그렇다고 해서 두 식이 서로 다른 의미인 것은 아니다.
고등학교 저학년 인수분해 파트에서 배웠듯이 $r^n-1=(r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+ \cdots +r+1)$이므로
$S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1} = \dfrac{a(r-1)(r^{n-1}+r^{n-2}+ \cdots +r+1)}{r-1} = a(r^{n-1}+r^{n-2}+ \cdots r+1)$이다.

예제(11) 08년 3월 교육청 나형 9번

등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\dfrac{31}{2}$이고 곱이 32일 때,

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}$ 의 값은? [3점]

① $\dfrac{31}{4}$ ② $\dfrac{31}{8}$ ③ $\dfrac{31}{12}$ ④ $\dfrac{8}{31}$ ⑤ $\dfrac{4}{31}$

1. $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$도 등비수열이다.

$a_n=ar^{n-1}$으로 놓으면 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}\times\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 5항까지의 합이 $\frac{31}{2}$이고 곱이 32이므로

$\frac{a(1-r^5)}{1-r}=\frac{31}{2}$

$a\times ar\times ar^2\times ar^3\times ar^4=a^5r^{10}=32=2^5$, $ar^2=2$

2. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\dfrac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{r}}$

$=\dfrac{\frac{1}{a}\left(\frac{r^5-1}{r^5}\right)}{\frac{r-1}{r}}=\frac{r^5-1}{a(r-1)}\times\frac{1}{r^4}$ ⋯ ㉠

$\frac{a(1-r^5)}{1-r}=\frac{31}{2}$의 양변에 $\frac{1}{a^2}$을 곱하면 $\frac{1-r^5}{a(1-r)}=\frac{r^5-1}{a(r-1)}=\frac{31}{2a^2}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{31}{2a^2}\times\frac{1}{r^4}=\frac{31}{2}\times\left(\frac{1}{ar^2}\right)^2=\frac{31}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{31}{8}$

답은 ②!!

comment

등비수열의 합 공식을 이용하지 않고도 풀 수 있다.

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4}$$

$$=\frac{1}{ar^4}(r^4+r^3+r^2+r+1)\ \cdots\ ㉠$$

등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 5항까지의 합은 $\frac{31}{2}$이므로 $a(1+r+r^2+r^3+r^4)=\frac{31}{2}$

$1+r+r^2+r^3+r^4=\frac{31}{2a}$를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{ar^4}(r^4+r^3+r^2+r+1)=\frac{1}{a^2r^4}\times\frac{31}{2}=\left(\frac{1}{ar^2}\right)^2\times\frac{31}{2}=\frac{31}{8}$

(3) $r^n \times \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ (단, p, q는 $q > p$인 자연수이고 $\{a_n\}$은 공비가 r인 등비수열)

등차수열에서 배운 공식 $\sum_{k=p}^{q} a_k + dn(q-p+1) = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$와 비슷한 느낌이지만, 이 공식이 훨씬 중요하다. 마찬가지로 공식을 외우려 하지 말고 이해하자. $a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q$**가** $a_{p+n} + a_{p+n+1} + \cdots + a_{q+n}$**이 되기 위한 조건이 생각하면 자연스레 이해할 수 있다.**

$a_p \times r^n = a_{p+n}$, $a_{p+1} \times r^n = a_{p+n+1}$, $\cdots$, $a_q \times r^n = a_{q+n}$이므로
$(a_p + a_{p+1} + \cdots + a_q) \times r^n = a_{p+n} + a_{p+n+1} + \cdots + a_{q+n}$이다.

시그마를 이용하여 예쁘게 정리하면 $r^n \times \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$이다.

앞으로 두 등비수열의 합이 있을 때 $r^n \times \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$ 성질을 이용할 수 있는지 확인하자.

e.g. 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $r^2 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=3}^{12} a_k$이다.

공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$\frac{S_6}{S_3} = \frac{S_3 + r^3 \times S_3}{S_3} = 1 + r^3$이다.

한편, 이 성질을 이용하면 등비수열의 합을 굉장히 유연하게 바라볼 수 있다.

예를 들어, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

수열 $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $\cdots$**의 공비는** r**이다.** (수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$)
수열 $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, $a_4 - a_3$, $\cdots$**의 공비는** r**이다.** (수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$)
수열 $a_1 + a_2$, $a_3 + a_4$, $a_5 + a_6$, $\cdots$**의 공비는** r^2**이다.** (수열 $\{a_{2n-1} + a_{2n}\}$)

이때, 수열 $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $\cdots$의 공비가 r이라는 점을 수식적으로도 증명할 수 있다.

수열 $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, $\cdots$은 수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$이다. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때 $a_n = ar^{n-1}$이다. 따라서 $a_n + a_{n+1} = ar^{n-1} + ar^n = ar^{n-1}(r+1) = (ar+a)r^{n-1}$에서
수열 $\{a_n + a_{n+1}\}$은 첫째항이 $a + ar (= a_1 + a_2)$이고 공비가 r인 등비수열이다.

수열 $\{a_{n+1} - a_n\}$과 수열 $\{a_{2n-1} + a_{2n}\}$에서도 똑같이 증명하면 된다. 스스로 해보자.

단, $r^n \times \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p+n}^{q+n} a_k$와 관련하여 주의할 부분이 있다.

예를 들어, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $16\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=5}^{14} a_k$라 할 때, (단, $r \neq 1$)

$r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=5}^{14} a_k$이므로 $16 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$에서 $16 = r^4$, $r = \pm 2$일까?

아니다. **$\sum_{k=1}^{10} a_k = 0$인 경우에도 $16 \times \sum_{k=1}^{10} a_k = r^4 \times \sum_{k=1}^{10} a_k$은 성립한다.**

(이런 실수를 방지하려면 이항하여 인수분해하는 것이 가장 좋다.)

즉, $\sum_{k=1}^{10} a_k = \dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 0$에서 $r^{10} = 1$, $r = -1 (\because r \neq 1)$인 경우도 고려해야 한다.

($r = -1$인 경우 $\sum_{k=1}^{10} a_k = a - a + a - a + \cdots + a - a = 0$이 된다.)

예제(12) 17년 3월 교육청 고2 가형 18번

첫째항이 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 다음 조건을 만족시킬 때, a_4의 값은? [4점]

(가) $S_{12} - S_2 = 4S_{10}$
(나) $S_{12} < S_{10}$

① -24　② -16　③ -8　④ 16　⑤ 24

1. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r이라 하자.

(가) $S_{12} - S_2 = 4S_{10}$ **에서** $a_3 + \cdots + a_{12} = 4(a_1 + \cdots + a_{10})$

$a_3 + \cdots + a_{12} = r^2 \times (a_1 + \cdots + a_{10})$이므로 $r^2 \times (a_1 + \cdots + a_{10}) = 4 \times (a_1 + \cdots + a_{10})$

$\therefore\ r^2 = 4$ 또는 $a_1 + \cdots + a_{10} = 0$

$a_1 + \cdots + a_{10} = 0$일 때의 r의 값을 구하자. $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2 인 등비수열이므로
$r = 1$인 경우 $a_1 + \cdots + a_{10} = 20$ (X)
$r \neq 1$인 경우 $a_1 + \cdots + a_{10} = \dfrac{2(r^{10} - 1)}{r - 1} = 0$에서 $r^{10} = 1,\ r = -1$ ($\because r \neq 1$)

2. **따라서** $r = 2$ **또는** $r = -2$ **또는** $r = -1$**이다. 조건 (나)를 통해** r**의 값을 구하자.**

$S_{12} < S_{10}$에서 $S_{12} - S_{10} < 0,\ a_{11} + a_{12} < 0$
$2r^{10}(1 + r) < 0,\ 1 + r < 0$
$r < -1$

$\therefore r = -2,\ a_4 = ar^3 = 2 \times (-2)^3 = -16$

답은 ②!!

comment

조건 (가)를 통해 $r^2 = 4$ 또는 $a_1 + \cdots + a_{10} = 0$을 도출한 다음, 조건 (나)를 만족시키는 r의 값을 구하면 된다. 특히 $S_{12} < S_{10}$**에서** S_{10}**을 이항하여** $S_{12} - S_{10} = a_{11} + a_{12} < 0$**을 관찰하는 것은 '수열의 합과 일반항의 관계'를 이용하는 중요한 테크닉**이므로 반드시 숙지하자.

예제(13) 20년 4월 교육청 가형 17번

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_3의 값은? [4점]

(가) $\sum_{k=1}^{4} a_k = 45$

(나) $\sum_{k=1}^{6} \frac{a_2 \times a_5}{a_k} = 189$

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

1. (가)에서 $a_1+a_2+a_3+a_4=45$이다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면 $(a>0, r>0)$

(나)에서 $a_2 \times a_5 \times \frac{1}{a_k} = ar \times ar^4 \times a^{-1}r^{1-k} = ar^{6-k}$이므로

$$\sum_{k=1}^{6} ar^{6-k} = ar^5+ar^4+ar^3+ar^2+ar+a$$
$$= a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6 = 189$$

따라서 $a_5+a_6=144$

2. **a_1+a_2, a_3+a_4, a_5+a_6은 이 순서대로 공비가 r^2인 등비수열을 이룬다.**

$a_1+a_2=t$라고 하면 $t+tr^2=45$, $tr^4=144$이다.

따라서 $t=\frac{144}{r^4}$를 $t+tr^2=45$에 대입하면 $\frac{144}{r^4}+\frac{144}{r^2}=45$, $\frac{1}{r^4}+\frac{1}{r^2}=\frac{45}{144}=\frac{5}{16}$

양변에 $16r^4$을 곱하면 $(\because r>0)$ $16+16r^2=5r^4$이다. $r^2=k\,(k>0)$라 하면

$5k^2-16k-16=0$, $(5k+4)(k-4)=0$ $\therefore k=4\,(\because k>0)$

$r^2=4$에서 $r>0$이므로 $r=2$이다.

3. $a_5+a_6=144$에서 $16a+32a=48a=144$이므로 $a=\frac{144}{48}=3$이다.

따라서 $a_3=ar^2=3\times 4=12$이다.

답은 ①!!

comment

무작정 (가), (나) 조건을 보고 등비수열의 합 공식을 이용하려 하면 계산이 꽤 복잡해진다. 항상 조건 간 관계를 관찰하면서 책에서 배운 도구를 적용할 수 있는지 살펴보자.

지금까지 배운 등차, 등비수열의 태도와 도구를 생각하면서 다음 준킬러 문항을 풀어보자.

예제(14) 19학년도 수능 나형 29번

첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_7+b_7의 값을 구하시오. [4점]

(가) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$

(나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)=67$

(다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|)=81$

1. **(나) 식에서 (가) 식을 변끼리 빼면** $\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40$**이다.**

$\{b_n\}$**은 첫째항이 자연수이고 공비가 음의 정수인 등비수열이므로** $b_1, b_3, b_5 > 0$**,** $b_2, b_4 < 0$**이다.**

$b_n > 0$이면 $|b_n|-b_n=0$,
$b_n < 0$이면 $|b_n|-b_n=-2b_n$이므로

$\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=-2b_2-2b_4=40$
$b_2+b_4=-20$

$\{b_n\}$의 첫째항을 b, 공비를 r이라 하면
$br+br^3=-20$
$br(1+r^2)=-20$

이때, **$br(1+r^2)=-20$을 통해 b, r의 값을 구할 수 없다고 생각하면 안 된다.** b는 자연수, r은 음의 정수이므로 $br(1+r^2)=-20$을 만족하는 b, r의 값은 유의미할 정도로 적다.

$1+r^2$이 20의 양의 약수여야 하므로 $r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$이다.

$r=-1$일 때 $b=10$
$r=-2$일 때 $b=2$
$r=-3$일 때 $b=\frac{2}{3}$ (X)

$\therefore b_n=10\times(-1)^{n-1}$ 또는 $b_n=2\times(-2)^{n-1}$

2. $b_n=10\times(-1)^{n-1}$ **또는** $b_n=2\times(-2)^{n-1}$**을** $\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$**에 대입하자.**

(i) $b_n=10\times(-1)^{n-1}$인 경우

$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{5}a_n+10=27$
$\sum_{n=1}^{5}a_n=17$

$\{a_n\}$은 등차수열이므로 등차중항을 이용하면 $\sum_{n=1}^{5} a_n = 5a_3 = 17,\ a_3 = \frac{17}{5}$ (X)

$\{a_n\}$의 첫째항은 자연수이고 공차는 음의 정수이므로 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 이 경우는 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $b_n = 2\times(-2)^{n-1}$인 경우

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{5} a_n + 22 = 27$$

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = 5$$

마찬가지로 등차중항을 이용하면 $5a_3 = 5,\ a_3 = 1$ (O)

a_3은 자연수이므로 조건을 만족시킨다.

3. (나) $\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|) = 67$, (다) $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|+|b_n|) = 81$를 이용하여 a_n의 나머지 항을 구하자.

(다) 식에서 (나) 식을 변끼리 빼면 $\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n) = 14$**이다.**

$\{a_n\}$**의 공차는 음의 정수이고** $a_3 = 1$**이므로** $a_1, a_2, a_3 > 0,\ a_4, a_5 \le 0$**이다.**

$a_n > 0$이면 $|a_n| - a_n = 0,\ a_n < 0$이면 $|a_n| - a_n = -2a_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{5}(|a_n|-a_n) = -2a_4 - 2a_5 = 14$$

$a_4 + a_5 = -7$

$(1+d)+(1+2d) = -7,\ 3d = -9$

$\therefore\ d = -3$

따라서 $a_7 = a_3 + 4d = 1 - 12 = -11,\ b_7 = br^6 = 2\times(-2)^6 = 128$이므로

$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$이다.

답은 117**!!**

comment

실전에서 마주치면 꽤 까다로운 문항이다. 이 문항 해결에 필요한 행동은 다음과 같다.

1. (가), (나), (다) 식을 적절히 변끼리 빼서 b_n에 관한 식과 a_n에 관한 식 얻기
2. b, r은 각각 실수보다 작은 범위인 자연수, 음의 정수이므로 $br(1+r^2) = -20$을 만족시키는 $b,\ r$의 값 얻기
3. 등차중항을 이용하여 등차수열의 합 표현하기