

제 2 교시

수학 영역(B형)

홀수형

5지선다형

1. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $2A+B$ 의 모든 성분의 합이 5일 때, a 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(2x^2+x) - \ln x}{x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\ln 2$ ② 1 ③ 2 ④ e ⑤ $2e$

3. 일차변환 $f: (x, y) \rightarrow (x-2y, 2x+y)$ 에 의하여 점 A가 점 B로 옮겨진다. $\overline{AB}=1$ 일 때, \overline{OB} 의 값은? (단, O는 원점이다.) [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

4. 두 사건 A, B가 서로 독립이고, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(A^c \cup B^c) = \frac{4}{5}$ 일 때, $P(A \cup B)$ 의 값은? (단, A^c 은 A의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{11}{15}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

5. 곡선 $y = x^2 \ln x^a$ ($x > 0$)의 극점이 직선 $y = x$ 위에 있을 때, 상수 a 의 값은? [3점]

- ① $-2\sqrt{e}$ ② $-e$ ③ -2
 ④ $-\frac{1}{e}$ ⑤ $-\frac{1}{\sqrt{e}}$

6. 음이 아닌 네 개의 정수 x, y, z, w 에 대하여 방정식 $x(y+w+z) = 13$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는?

[3점]

- ① 72 ② 84 ③ 96 ④ 108 ⑤ 120

7. 일차변환 f 에 의하여 점 $(0, 1)$ 이 점 $(1, 1)$ 로 옮겨지고, 일차변환 f 의 역변환 f^{-1} 에 의하여 점 $(3, -2)$ 는 점 $(2, 2)$ 로 옮겨진다. 일차변환 f 에 의하여 점 $(2, 0)$ 이 점 (a, b) 로 옮겨질 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

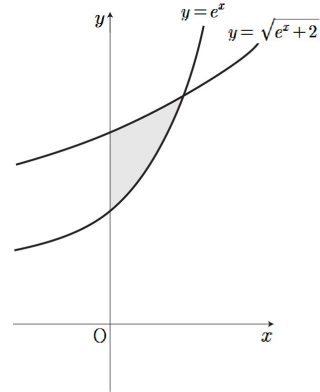
8. 방정식 $\cos^2 x - \cos^4 x = \frac{1}{20}$ 을 만족시키는 x 에 대하여,
 $\cos 4x$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

9. 좌표공간에서 구 $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 6z = 11$ 의 한 점 P와
 점 A(-2, 0, 3)에 대하여 선분 AP를 3 : 1로 외분하는 점의
 좌표가 (-4, 1, a)이다. 양수 a의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

10. 두 곡선 $y = e^x$, $y = \sqrt{e^x + 2}$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분을
 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? [3점]



- ① $(\ln 2 - 1)\pi$ ② $(2\ln 2 - \frac{1}{2})\pi$ ③ $(3\ln 2 - \frac{1}{3})\pi$
 ④ $(4\ln 2 - \frac{1}{4})\pi$ ⑤ $(5\ln 2 - \frac{1}{5})\pi$

11. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = \frac{1}{3}$ 이고,

$$\frac{n+1}{a_n} - \frac{n}{a_{n+1}} = 1 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여

$$\frac{n}{a_{n+1}} - n = \frac{n+1}{a_n} - \boxed{\text{(가)}}$$

이다. $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$ 이라 하면

$$b_{n+1} = \frac{\boxed{\text{(가)}}}{n} \times b_n$$

이고, $b_1 = 2$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 그러므로

$$a_n = \frac{1}{\boxed{\text{(나)}} + 1} \quad (n \geq 1)$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때,

$\frac{f(5)}{g(15)}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

12. 연속확률변수 X 의 확률밀도함수가

$$f(x) = a - \frac{1}{x} \quad (1 \leq x \leq e)$$

일 때, $E(X)$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{e}{2}$ ③ $e-1$ ④ 2 ⑤ e

[13~14] 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=96$ 가 평면

$x+y+z=12$ 와 만나서 생기는 도형 C 위에 한 점을 잡고

$P(a, b, c)$ 라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. 세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b 의 값은?

[3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

14. 벡터 \vec{PQ} 의 성분들의 표준편차가 6이 되도록 도형 C 위에 점 Q를 잡을 때, $\vec{OP} \cdot \vec{OQ}$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

- ① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

15. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$AB = 2E - A, \quad A^3 + B^{-1} = 4E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

- ㄱ. A 의 역행렬이 존재한다.
- ㄴ. $AB^3 = B^3A$
- ㄷ. $A^4B + 5A = 8E$

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄴ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건들을 만족시킨다.

- (가) 함수 $(x-a)f(x)$ 의 그래프가 x 축과 세 점 $(4, 0), (b, 0), (10, 0)$ 에서 만난다.
- (나) 부등식 $\frac{f(x)}{x-a} \leq 0$ 를 만족시키는 모든 자연수 x 의 합은 27이다.

$f(5)$ 의 값은? (단, b 는 $4 < b < 10$ 인 자연수이다.) [4점]

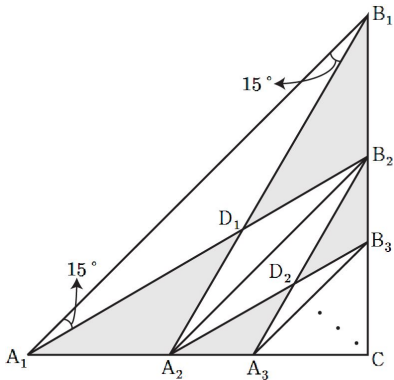
- ① -6
- ② -3
- ③ -2
- ④ 1
- ⑤ 4

17. 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분 A_1B_1 을 빗변으로 하는 직각이등변삼각형 A_1B_1C 가 있다. 그림과 같이 $\angle A_1B_1A_2 = \angle B_1A_1B_2 = 15^\circ$ 가 되도록 선분 A_1C 위에 점 A_2 를, 선분 B_1C 위에 점 B_2 를 정하고, 두 선분 A_1B_2, B_1A_2 가 만나는 점을 D_1 , 두 삼각형 $A_1A_2D_1, B_1B_2D_1$ 의 넓이의 합을 S_1 이라 하자.

$\angle A_2B_2A_3 = \angle B_2A_2B_3 = 15^\circ$ 가 되도록 선분 A_2C 위에 점 A_3 , 선분 B_2C 위에 점 B_3 를 정하고, 두 선분 A_2B_3, B_2A_3 가 만나는 점을 D_2 , 두 삼각형 $A_2A_3D_2, B_2B_3D_2$ 의 넓이의 합을 S_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 얻은 S_n 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?

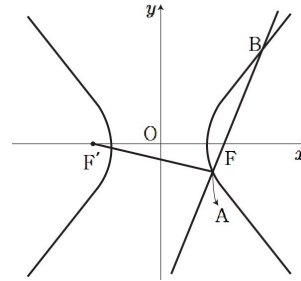
[4점]



- ① $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$
- ④ $2-\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}-4}{4}$

18. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 의 두 초점을 $F(c, 0), F'(-c, 0)$

(단, $c > 0$), 점 F 를 지나고 기울기가 2인 직선이 이 쌍곡선과 만나는 두 점을 A, B 라 하자. $\overline{AB} = \overline{AF'}$ 일 때, a^2 의 값은? (단, 점 A 는 제 4사분면 위에 있다.) [4점]



- ① 20 ② 24 ③ 28 ④ 32 ⑤ 36

19. 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 를 따르는 모집단에서 임의 추출하여 얻은 크기 100인 표본평균 \bar{X} 가

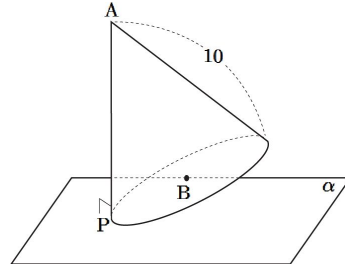
$$P\left(\bar{X} \leq \frac{\sigma}{5}\right) = 0.5$$

를 만족시킨다. 표준정규분포를 따르는 확률변수 Z 에 대하여 $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} P(\bar{X} \geq Z)$ 의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구한 것은? [4점]

| x | $P(m \leq X \leq x)$ |
|-----------------|----------------------|
| $m + 0.5\sigma$ | 0.1915 |
| $m + \sigma$ | 0.3413 |
| $m + 2\sigma$ | 0.4772 |

- ① 0.0228 ② 0.1587 ③ 0.3085
- ④ 0.6915 ⑤ 0.9772

20. 그림과 같이 꼭짓점이 A이고, 밑면의 중심이 B, 모선의 길이가 10인 원뿔이 평면 α 와 한 점 P에서 만난다. 직선 AP와 평면 α 가 수직이고, 점 B에서 평면 α 에 이르는 거리가 2일 때, 이 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



- ① $4\sqrt{5}\pi$ ② $6\sqrt{5}\pi$ ③ $8\sqrt{5}\pi$
- ④ $10\sqrt{5}\pi$ ⑤ $12\sqrt{5}\pi$

21. 좌표평면 위의 두 점 $(\frac{\pi}{4}, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, -6)$ 을 지나는 곡선

$$y = 5\sin(2x + \theta) - 3 \quad (0 < x < \pi)$$

이 곡선 $y = m \tan x$ 와 만나는 점의 개수를 $h(m)$ 이라 하자.
 함수 $h(m)$ 이 구간 (a, ∞) 에서 연속이 되도록 하는 실수 a 의
 최솟값은? [4점]

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

단답형

22. 1보다 큰 실수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표와 $\log \frac{1}{x}$ 의 지표의
 차가 25일 때, $\log 100x$ 의 지표를 구하시오. [3점]

23. 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, \frac{1}{2})$ 를 따르고
 $P(X=16) = P(X=60)$ 일 때, X 의 분산을 구하시오. [3점]

24. 무리방정식 $\sqrt{4x - \frac{2}{x} + 3} = 2x - \frac{1}{x} - 6$ 의 모든 실근의 합을 k 라 할 때, $10k$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 중력과 저항이 없는 상태에서 질량이 m_0 이고 속력이 v_0 인 로켓이 가속하여 질량이 x 가 되었을 때, 로켓의 속력을 v 라 하면 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$$v = k \log_a \frac{x}{m_0} + v_0$$

(단, k 는 양의 상수이고, 속력의 단위는 $km/초$, 질량의 단위는 t 이다.)

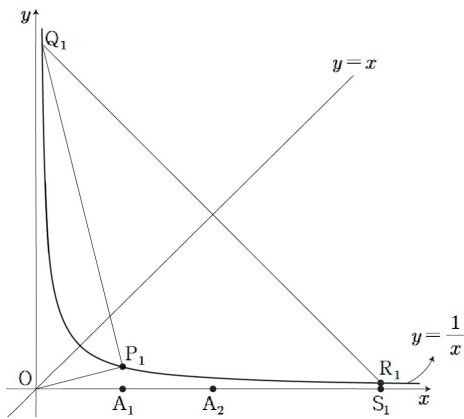
속력이 v_0 인 어떤 로켓이 가속하여 질량이 $m_0 \frac{13}{10}$ 가 될 때까지 속력이 9만큼 증가하였고, 이로부터 질량이 m_0^p 가 될 때까지 속력이 1만큼 더 증가하였다. $15p$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 미분 가능하고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, 곡선 $y = \{g(x)\}^3$ 위의 한 점 $(1, \{g(1)\}^3)$ 에서 접하는 직선의 방정식이 $y = x - 9$ 이다. $f'(-2)$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 자연수 n 에 대하여 점 A_n 이 x 축 위의 점일 때, 점 A_{n+1} 을 다음 규칙에 따라 정한다.

- (가) 점 A_1 의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.
 (나) (1) 점 A_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 과 만나는 점을 P_n 이라 한다.
 (2) 점 P_n 을 지나고 직선 OP_n 과 수직인 직선이 곡선 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 과 만나는 점 Q_n 이라 한다.
 (3) 점 Q_n 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 R_n 이라 한다.
 (4) 점 R_n 을 지나고 y 축에 평행한 직선이 x 축과 만나는 점을 S_n 이라 한다.
 (5) 선분 OS_n 의 중점을 A_{n+1} 이라 한다.

$\log_4 \overline{OA_6}$ 의 값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.) [4점]



28. 좌표공간에서 평면 α 가 다음 조건들을 만족시킨다.

- (가) 직선 $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{4}, z = 2$ 을 포함한다.
 (나) xy 평면 위의 포물선 $y^2 = 16x$ 와 오직 한 점에서 만난다.

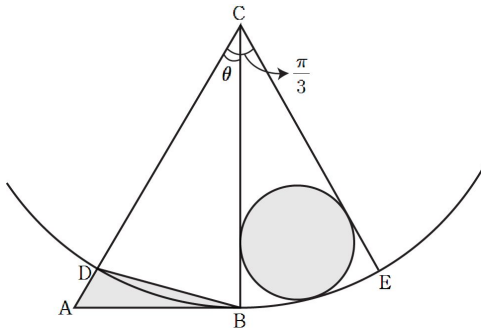
평면 α 가 xy 평면과 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\tan\theta$ 의 값을 구하시오. [4점]

29. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, $\angle ACB = \theta$ 이다.

그림과 같이 점 C를 중심으로, 선분 BC를 반지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점을 D, $\angle ACE = \frac{\pi}{3}$ 인 원 위의 점을 E라 하자. 삼각형 ABD의 넓이를 $f(\theta)$, 부채꼴 CBE에 내접하는 원의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta^3 g(\theta)}{f(\theta)} = \frac{q}{p} \pi$$

이다. $10p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \int_{e^x}^{xe^x} f(t)e^t dt$$

가 다음 조건들을 만족시킨다.

- (가) $g(x) \geq 0$
- (나) $g'(0) = e(e-2)^2$

$f(5e) = e(ae+b)$ 일 때, a^2+b^2 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 정수이다.) [4점]