[박하나/한성은 모의고사]

대학수학능력시험 수학(나형) 연습 (3/4)

한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

파이널 시즌인데 긴장감 제로.
나만 그런가?

hansungeun.com
– 저자소개, 학습자료, 교재판매

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

2. $\lim_{x \to 0} \frac{x+x^3}{x+x^2}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

3. $\int_{-1}^{2} 6x^2 dx$의 값은? [2점]

① 20 ② 18 ③ 16 ④ 14 ⑤ 12

4. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 6$, $a_7 = 12$일 때, $a_1 + a_{10}$의 값은? [3점]

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

5. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^c은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(A|B)$의 값은? (단, B^c은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ 1

6. $(x^2+x^3)^4$의 전개식에서 x^{10}의 계수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

7. 실수 α에 대하여 $2\sin\alpha+\cos\alpha=0$일 때, $\sin\alpha\times\cos\alpha$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

8. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x \le 2) \\ -x^2+bx & (x>2) \end{cases}$$

에 대하여 $f(1)=f(3)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

9. 닫힌 구간 $[-4, 4]$의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f(x)=a|x| \ (-4 \le x \le 4)$$

일 때, $a+\mathrm{P}(X \ge 2)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{16}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{5}{16}$
④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{7}{16}$

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n-1}=n \\ a_{2n}=n-1 \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{20} a_k$의 값은? [3점]

① 70 ② 80 ③ 90
④ 100 ⑤ 110

11. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$에 대하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+2h)-f(1)}{3h}=6$$

일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

12. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=x^3+x\int_0^2 f'(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(4)$의 값은? [3점]

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

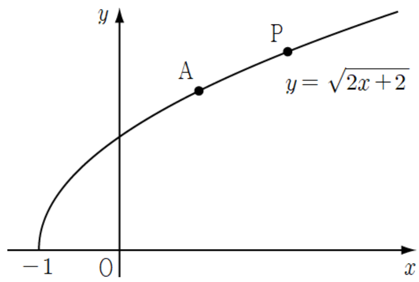
13. 반지름의 길이가 $3\sqrt{6}$인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC가

$$\overline{\mathrm{AB}}=12,\quad \overline{\mathrm{AC}}=8\sqrt{3}$$

일 때, $\overline{\mathrm{BC}}$의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

14. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{2x+2}$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 2)$와 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2t+2})$가 있다. $\lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{t-1}$의 값은? [4점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

15. 검은 공 12개와 흰 공 6개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 6개의 공을 꺼냈을 때 꺼낸 6개의 공 중 검은 공의 개수를 확률변수 X라 하자. 다음은 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다.

> 0 이상 6 이하의 정수 k에 대하여 $\mathrm{P}(X=k)$는
>
> $$\frac{{}_{12}\mathrm{C}_k \times {}_6\mathrm{C}_{6-k}}{{}_{18}\mathrm{C}_6}$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{6} k\times \mathrm{P}(X=k)$$
> $$=\sum_{k=0}^{6}\left\{k\times\frac{{}_{12}\mathrm{C}_k\times{}_6\mathrm{C}_{6-k}}{{}_{18}\mathrm{C}_6}\right\}$$
>
> 이다. $1\le k\le 6$인 자연수 k에 대하여
>
> $$k\times{}_{12}\mathrm{C}_k=12\times\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이고, 다항식 $(1+x)^{11}(1+x)^6$의 전개식에서 x^5의 계수를 찌려보면
>
> $$\sum_{k=1}^{6}\left\{\boxed{\text{(가)}}\times{}_6\mathrm{C}_{6-k}\right\}={}_{17}\mathrm{C}_5$$
>
> 이므로
>
> $$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{6}\left\{k\times\frac{{}_{12}\mathrm{C}_k\times{}_6\mathrm{C}_{6-k}}{{}_{18}\mathrm{C}_6}\right\}$$
> $$=\sum_{k=1}^{6}\left\{k\times\frac{{}_{12}\mathrm{C}_k\times{}_6\mathrm{C}_{6-k}}{{}_{18}\mathrm{C}_6}\right\}$$
> $$=\frac{1}{{}_{18}\mathrm{C}_6}\sum_{k=1}^{6}\left\{k\times{}_{12}\mathrm{C}_k\times{}_6\mathrm{C}_{6-k}\right\}$$
> $$=\frac{12}{{}_{18}\mathrm{C}_6}\sum_{k=1}^{6}\left\{\boxed{\text{(가)}}\times{}_6\mathrm{C}_{6-k}\right\}$$
> $$=\frac{12}{{}_{18}\mathrm{C}_6}\times{}_{17}\mathrm{C}_5$$
> $$=\boxed{\text{(나)}}$$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p+f(4)$의 값은? [4점]

① 174　② 169　③ 164　④ 159　⑤ 154

16. 함수 $f(x)=x^2(1-ax)$ 위의 한 점 P에서의 접선의 방정식이 $y=x$이다. a의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ 1　⑤ $\frac{5}{4}$

17. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $x \geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(x) = f'(-x)$
> (나) $f'(x) = -x^2 + x + 2$

함수 $f(x)$의 극솟값이 0일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [4점]

① $\frac{16}{3}$　② 6　③ $\frac{20}{3}$　④ $\frac{22}{3}$　⑤ 8

18. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f'(3) = 0$
> (나) 곡선 $y = f(x)$가 점 $(1,\ f(1))$에서 x축에 접한다.

점 $(1,\ f(1))$이 아닌 점 $(a,\ b)$를 함수 $y = f(x)$의 그래프가 항상 지날 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 11　② 13　③ 15　④ 17　⑤ 19

19. A, B 두 선수가 탁구 시합을 할 때, 다음 조건을 만족시키면 시합에서 A가 승리한다.

A가 이긴 세트의 수가 B가 이긴 세트의 수보다 2만큼 크거나 A가 이긴 세트의 수가 4이다.

첫 세트에서 A가 이겼을 때, 이 시합에서 A가 승리할 확률은? (단, 각 세트에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이다.) [4점]

① $\frac{13}{16}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{11}{16}$
④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

20. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{8}$인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=\frac{|x|}{2}$는 모든 실수 x에 대하여

$$(x+4)\{f(x)-g(x)\}\geq 0$$

을 만족시킨다. $f(4)=2$일 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}=n$이다. (나) 2 이상의 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{2n-1} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{64} a_k = 256$일 때, a_1의 값은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

단답형

22. $\sigma(X)=2$인 확률변수 X에 대하여 $\mathrm{V}(2X+2)$의 값을 구하여라. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{8}(a_k+k)=50$일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값을 구하여라. [3점]

24. A, A, A, B, B, C의 문자가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, B가 적힌 카드끼리 이웃하지 않도록 하는 경우의 수를 구하여라. [3점]

25. 세 실수 x, y, z가

$$3^x = 2, \quad \left(\frac{1}{12}\right)^y = 4, \quad a^z = 8$$

를 만족시킨다. $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=1$일 때, 양수 a의 값을 구하여라. [3점]

26. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X에 대하여 함수

$$f(a) = \mathrm{P}(|X-a| \geq 4)$$

는 $a=10$일 때 최솟값 0.0456을 갖는다. 아래의 표준정규분포표를 이용하여 $m+\sigma^2$의 값을 구하여라. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log_2 n$이 정수이면 $a_n = \log_2 n$이다.
(나) $\log_2 n$이 정수가 아니면 $a_n = a_{n-1} + 1$이다.

$\sum_{n=1}^{31} a_n$의 값을 구하여라. [4점]

28. $1 \le a \le b \le c \le d \le 6$을 만족시키는 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c, d)가 $(a-b)(b-c)(c-d)=0$을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. [4점]

29. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$f(1)f(2) \leq f(4)$이거나 함수 f의 치역이 A이다.

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\{f'(t)+|f'(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$
(나) $\{x\,\vert\,g(x)=k\}=\{x\,\vert\,1\leq x\leq 3\}$

$9k\times f(-1)$의 값을 구하여라. [4점]

[박하나/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습(3/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	③	03	②	04	④	05	①
06	①	07	①	08	⑤	09	⑤	10	④
11	②	12	④	13	④	14	③	15	②
16	①	17	③	18	②	19	②	20	⑤
21	④	22	16	23	14	24	40	25	8
26	14	27	253	28	79	29	171	30	185

COMMENT 15

$f(k)={}_{11}\mathrm{C}_{k-1}$, $\quad p=4$

COMMENT 18

$f(x)=(x-1)^2(x^2+ax+b)$에서 $f'(3)=0$이므로 $b=-4a-15$이다. 곡선

$$y=(x-1)^2(x^2+ax-4a-15)=\{(x-1)^2(x-4)\}a+\{(x-1)^2(x^2-15)\}$$

는 a의 값과 관계없이 점 $(4,\ 9)$를 지난다.

COMMENT 19

경우를 모두 나열하면

승, 패승승, 패승패승승, 패패승승승, 패승패승패승, 패승패패승승, 패패승승패승, 패패승패승승

이다. 음.. 이건 좀 멍청해 보이죠? 4×4 타일에서 길찾기로 생각해보면 조아요.

COMMENT 20

$f'(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(-4)=2$이다. $f(x)=\dfrac{1}{8}(x+4)(x-4)(x-a)+2$에서 $f'(4)=\dfrac{1}{2}$을 풀면 $a=\dfrac{7}{2}$이다.

다른 풀이) $f(x)=\dfrac{1}{8}(x-4)^2(x-b)+\dfrac{1}{2}x$에서 $f(-4)=2$를 풀어도 좋다. $b=-\dfrac{9}{2}$이다.

COMMENT 21

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=n+1}^{2n-1}a_k$의 양 변에 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$를 더하면 $2S_n=S_{2n-1}$이다.

$$\begin{aligned}
S_{64}&=a_{64}+S_{63}=a_{64}+2S_{32}\\
&=a_{64}+(2a_{32}+2S_{31})=a_{64}+2a_{32}+4S_{16}\\
&=a_{64}+2a_{32}+(4a_{16}+4S_{15})=a_{64}+2a_{32}+4a_{16}+8S_8\\
&=a_{64}+2a_{32}+4a_{16}+(8a_8+8S_7)=a_{64}+2a_{32}+4a_{16}+8a_8+16S_4\\
&=a_{64}+2a_{32}+4a_{16}+8a_8+(16a_4+16S_3)=a_{64}+2a_{32}+4a_{16}+8a_8+16a_4+32S_2\\
&=a_{64}+2a_{32}+4a_{16}+8a_8+16a_4+32a_2+32a_1
\end{aligned}$$

COMMENT 27

$0+\{1\times2+(1)\}+\{2\times4+(1+2+3)\}+\{3\times8+(1+2+\cdots+7)\}+\{4\times16+(1+2+\cdots+15)\}$

COMMENT 28

여사건은 $a<b<c<d$인 사건이므로 답은 $1-\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_6\mathrm{H}_4}=\dfrac{37}{42}$이다.

COMMENT 29

풀이1) 포함배제를 이용하여

$f(1)f(2) \leq f(4)$인 사건의 확률은 $\frac{17}{64}$, 치역이 A일 확률은 $\frac{3}{32}$, 두 사건의 곱사건의 확률은 $\frac{3}{128}$이다.

구하는 확률은 $\frac{17}{64}+\frac{3}{32}-\frac{3}{128}=\frac{43}{128}$이다.

풀이2) 여사건을 이용하여(어떻게 세더라도 심한 삽질 필요한 듯.)

$f(1)f(2) > f(4)$이며 함수 f의 치역이 A가 아닌 사건이다. 경우의 수를 $f(4)$에 의해 분류하면

$f(4)=1$일 때 54, $f(4)=2$일 때 46, $f(4)=3$일 때 40, $f(4)=4$일 때 30

이므로 답은 $1-\frac{54+46+40+30}{4^4}$이다. 여사건 많이 띄울 것 같아서 한 번 해봤는데, 일일이 다 센 수준.

COMMENT 30

(가)에서 $f(0)=0$, $f'(0)=0$이다.

$g(0)=0$이고 $g'(x)=\frac{1}{2}\{f'(x)+|f'(x)|\}=\begin{cases} f'(x) & (f'(x) \geq 0) \\ 0 & (f'(x) < 0) \end{cases}$이다. 따라서

$f(x)$가 증가하는 구간에서 $g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$를 평행이동한 것이고,

$f(x)$가 감소하는 구간에서 함수 $g(x)$는 상수이다.

이 때, (나) 조건을 째려보면 $1 \leq x \leq 3$에서 $f(x)$가 감소, $f'(x) \leq 0$이므로 $f'(1)=f'(3)=0$이다.

$f'(x)=4x(x-1)(x-3)$이고 적분치면 $f(x)=x^4-\frac{16}{3}x^3+6x^2$이다.

$g(0)$이고, 각을 보면 k는 $g(1)-g(0)=\int_0^1 f'(x)dx=f(1)$이므로 $k=\frac{5}{3}$이다.