[나승민/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (3/4) |

나승민 (성균관대 수학과)

이투스앤써, 이투스 네오

다양한 소재를 경험하고 오답하는
파이널이 될 수 있도록 화이팅!

수학에 감각을 더하다.
instagram @cremath_david

한성은 (POSTECH 수학과)

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

이제 2달 정도 남았습니다.
후회남지 않는 시간이 될 수 있도록.

hansungeun.com
– 저자소개, 학습자료, 교재판매

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

2. $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ 1 ④ $\frac{e}{2}$ ⑤ e

3. $\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② 1 ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

4. 곡선 $f(x)=\ln(2x+4)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$ 에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\frac{11}{12}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

6. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n+2}-2\right)$가 수렴할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n}{n+1}$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

7. 첫째항이 $\frac{1}{3}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3+a_5=30,\quad a_5>a_3>a_4$$

일 때, a_8의 값은? [3점]

① -729 ② -243 ③ 81
④ 243 ⑤ 729

8. 다항식 $(x+y+z+w)^{10}$의 전개식에서 x가 포함된 항의 개수는? [3점]

① 120 ② 165 ③ 220
④ 286 ⑤ 392

9. 닫힌 구간 $[-1,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)=2^{x^2-2x-2}$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [3점]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 64 ⑤ 128

10. 어느 배달업체 고객의 주문 대기 시간은 평균이 m분, 표준편차가 σ분인 정규분포를 따른다고 한다. 이 배달업체 고객 중 16명을 임의추출하여 신뢰도 95%로 추정한 모평균 m에 대한 신뢰 구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a=4.9$일 때, σ의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [3점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

11. $a_3=8$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1+a_2+a_3=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+3}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{3n}$의 값은? [3점]

① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

12. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$의 값은? [3점]

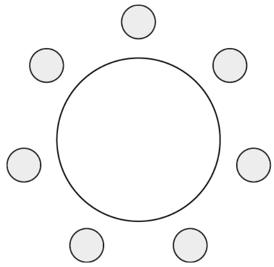
① $2\sqrt{2}-1$ ② $2\sqrt{2}-2$ ③ $4\sqrt{2}-1$
④ $4\sqrt{2}-2$ ⑤ $4\sqrt{2}-4$

13. 역함수가 $g(x)$인 함수 $f(x)=\ln x+a$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $4-\frac{1}{e}$ ② $2-\frac{2}{e}$ ③ $2-\frac{1}{e}$

④ $1-\frac{2}{e}$ ⑤ $1-\frac{1}{e}$

14. 7명이 둘러앉을 수 있는 원 모양의 탁자와 여학생 3명, 남학생 4명이 있다. 이 7명의 학생 모두를 일정한 간격으로 탁자에 둘러앉게 할 때, 여학생들 중 어느 2명은 이웃하고, 남은 1명은 어느 여학생과도 이웃하지 않게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



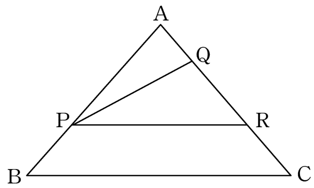
① 108 ② 420 ③ 432

④ 444 ⑤ 456

15. 점근선이 $3x-2=0$인 곡선 $y=\log_2(ax+b)$과 직선 $x-2y+4=0$이 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$이다. $a+b$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

16. 그림과 같이 삼각형 ABC에 대하여 점 P는 선분 AB의 $2:1$ 내분점이고, 두 점 Q, R은 모두 선분 AC 위의 점이다. 두 삼각형 APQ, PRQ와 사각형 PBCR의 넓이가 차례로 첫째항이 $2a$, 공차가 a인 등차수열을 이룰 때, 다음은 $\dfrac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}}$의 값을 a와 d로 나타내는 과정이다.



삼각형 APQ의 넓이는 $2a$이므로
삼각형 APR의 넓이는 $\boxed{(가)}$가 되어

$$2a:\boxed{(가)}=\triangle\mathrm{APQ}:\triangle\mathrm{APR}$$
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\,\overline{\mathrm{AQ}}\sin\mathrm{A}:\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\,\overline{\mathrm{AR}}\sin\mathrm{A}$$

이다. 따라서

$$\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}}=\frac{2a}{\boxed{(가)}}\quad\cdots\ ㉠$$

이다. 같은 방법으로,
삼각형 ABC의 넓이는 $9a$이므로

$$2a:9a=\triangle\mathrm{APQ}:\triangle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AP}}\,\overline{\mathrm{AQ}}\sin\mathrm{A}:\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin\mathrm{A}$$

이고, 또

$$\overline{\mathrm{AP}}=\frac{2}{3}\overline{\mathrm{AB}},\qquad \frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}$$

이므로

$$\frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}=\boxed{(나)}\quad\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의해

$$\frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}}=\frac{\overline{\mathrm{CQ}}}{\overline{\mathrm{AQ}}}\times\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AR}}}=\boxed{(다)}$$

이다.

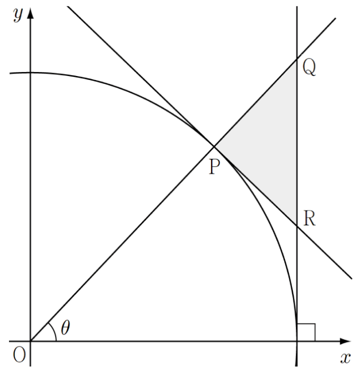
위의 과정에서 (가)에 알맞은 식을 $f(a)$, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하자. $pq\times f(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{104}{5}$ ② $\frac{96}{5}$ ③ $\frac{88}{5}$
④ 16 ⑤ $\frac{72}{5}$

17. 함수 $f(x)=\log_2\frac{x}{8}\times\log_2\frac{1}{2x}$ 가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값은? [4점]

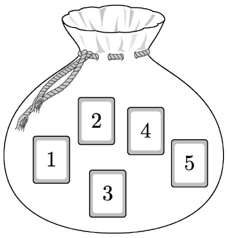
① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

18. 그림과 같이 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 C 위의 점 P가 있다. 직선 $x=1$과 직선 OP의 교점을 Q, 직선 $x=1$과 점 P에서 원 C에 접하는 직선의 교점을 R이라 하자. 동경 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이는 $S(\theta)$이다.
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

19. 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 두 장의 카드를 동시에 꺼내어 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 두 번 반복한다. 첫 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 a_1, 큰 수를 a_2라 하고, 두 번째 시행에서 확인한 두 수 중 작은 수를 b_1, 큰 수를 b_2라 할 때, $a_1+a_2=b_1+b_2$를 만족시킬 확률은? [4점]



① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{1}{10}$ ③ $\frac{3}{25}$
④ $\frac{7}{50}$ ⑤ $\frac{4}{25}$

20. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(f(x))$는 $x=1$에서 극솟값을 갖고, $x=2$에서 극댓값을 갖는다.

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

일 때, 함수 $g(f(x))$의 최솟값은? [4점]

① -6 ② -9 ③ -12
④ -15 ⑤ -18

21. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{이 짝수인 경우})\\ \dfrac{a_n+1}{2} & (a_n\text{이 홀수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. 5 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1}$이 짝수일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 최솟값은? [4점]

① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

단답형

22. 다항식 $(x-2)^5$의 전개식에서 x^3의 계수를 구하여라. [3점]

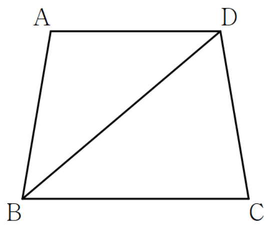
23. $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sqrt{n^4+4n^3+4}}{n}-n\right\}$의 값은? [3점]

24. 부등식

$$\log_2(x-2)+\log_2(x-4) \leq 3$$

를 만족시키는 모든 정수 x값의 합을 구하여라. [3점]

25. 두 변 AD와 BC가 서로 평행한 사다리꼴 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=6$이고 $\overline{BD}=2\sqrt{21}$일 때, 선분 BC의 길이를 구하여라. [3점]



26. $a_1>0$이고 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{11}(|a_k|+a_k)=65$$

일 때, $\dfrac{1}{a_1}$의 값을 구하여라. [4점]

27. 확률변수 X가 가지는 값이 1부터 4까지의 자연수이고 확률변수 Y가

$$\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{P}(Y=2x+1)\ \ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

를 만족시킨다. $\mathrm{E}(X)=2$, $\mathrm{V}(X)=1$일 때, $\mathrm{E}(Y^2)$의 값을 구하여라. [4점]

28. 양의 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수

$$f(x)=(\ln x)^2-2\ln x$$

에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=\frac{f(t)}{t}x$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 불연속이 되는 양수 t를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, $\cdots$, α_n이라 할 때, $n+\ln(\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$의 값을 구하여라. [4점]

29. 서로 다른 사탕 5개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 서로 구별할 수 없는 3개의 상자에 남김없이 나누어 넣을 때, 다음 조건을 만족시키도록 나누어 넣는 경우의 수를 구하여라. [4점]

> (가) 각 상자에 들어가는 사탕의 개수는 3 이하이다.
> (나) 각 상자에 들어가는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 2 이상이다.

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^x \sqrt{4+\{f(t)\}^2}\,dt$$

를 만족시킨다. $f'(a)=5$인 실수 a에 대하여 $\int_0^a \{f(x)\}^3 dx$의 값을 구하여라. [4점]

[나승민/한성은 모의고사]

수능(가형) 연습(3/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	⑤	03	③	04	④	05	⑤
06	④	07	①	08	③	09	②	10	①
11	①	12	②	13	④	14	③	15	②
16	④	17	①	18	③	19	⑤	20	⑤
21	④	22	40	23	2	24	11	25	8
26	42	27	29	28	11	29	425	30	27

COMMENT 13

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$에 접해야 한다. 접점을 $(t,\ t)$라 하면

$f'(t)=1$, $f(t)=t$에서 $t=1$, $a=1$이다. 구하는 넓이는 $2\int_0^1 (e^{x-1}-x)dx=1-\frac{2}{e}$이다.

※ $2\int_0^1 \{x-(\ln x)+1\}dx$ 아닌 것 주의. x축 아래쪽으로 뚫려서.

COMMENT 15

직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{A}(p,\ q)$라 하면 $\mathrm{B}(p+4,\ q+2)$이다.

점근선이 $x=\frac{2}{3}$이므로 $-\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$에서 $b=-\frac{2}{3}a$이다. $\log_2\left(ap-\frac{2}{3}a\right)=q$, $\log_2\left(a(p+4)-\frac{2}{3}a\right)=q+2$에서

$\log_2\left(a(p+4)-\frac{2}{3}a\right)-\log_2\left(ap-\frac{2}{3}a\right)=2$이므로 $p=2$, $q=3$, $a=6$, $b=-4$이다.

COMMENT 16

$f(a)=5a$, $\quad p=2$, $\quad q=\frac{4}{5}$

COMMENT 18

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{RA}}=\overline{\mathrm{RP}}=\tan\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\tan\frac{\theta}{2}\times\tan\theta$이므로 $S(\theta)=\frac{1}{2}\times\tan^2\frac{\theta}{2}\times\tan\theta$이다.

COMMENT 19

$a_1+a_2=b_1+b_2$의 값이 3, 4, 8, 9일 확률은 각각 $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$이고,

$a_1+a_2=b_1+b_2$의 값이 5, 6, 7일 확률은 각각 $\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}$이다.

COMMENT 20

함수 $f(f(x))$의 도함수 $f'(f(x))f'(x)$가 0일 때는 $f'(f(x))=0$ 또는 $f'(x)=0$일 때이다.
$f'(f(x))=0$는 2개의 근을 가지고 대칭성을 째려보면 $x=1$과 $x=3$을 근으로 갖는다.
$x=2$가 방정식 $f'(x)=0$의 근이므로 $f(x)=3(x-2)^2+b$이고 $f(1)=2$이므로 $b=-1$이다.

함수 $g(x)$의 도함수는 $f(x)$이다. 개형이 증감증이긴 한데 $g(f(x))$의 최솟값은 $f(x)$가 최솟값 -1을 가질 때겠다.
(대충 봐도 차이가 많이 나지만, 엄밀하게는 $g(x)$의 극솟값과 비교해 줘야 한다.) 최솟값은 $\int_0^{-1} f(t)dt=-18$이다.

COMMENT 21

아무 자연수나 a_n에 넣고 뒤로 진행시켜봐. 나중에는 1, 1, 1, 1, ⋯ 이 나온다.
그 바로 전 항은 2이다. 그 전 항은 3 또는 4, ⋯ 이런 식이라는 것을 눈치 까야 한다.

$\sum_{k=1}^{10} a_k$가 최소가 되려면 그냥 $a_1=1$, 1, 1, ⋯, $a_{10}=1$이면 좋겠는데
  '5 이하의 자연수 n에 대하여 $a_n a_{n+1}$이 짝수'
조건이 그것을 허락하지 않는군. $a_5=2$로 두는 것이 최소각이다.
이제 a_4는 3 또는 4인데 최소로 가려면 $a_4=3$이고, a_3은 5 또는 6인데 a_3a_4가 짝수로 가야 하므로 $a_3=6$이고, ⋯
뭐 이런 식으로. $a_2=11$, $a_1=22$일 때가 최소이다. 다른 길로 가보려니까.. 그냥 망한다.

COMMENT 25

$\angle ABD = \theta$라 하자. $\angle ADB = \angle DBC = \theta$이다. 이등변삼각형 ABD에서 $\cos\theta = \frac{\sqrt{21}}{6}$이다.

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{BH} = \overline{BD} \times \cos\theta = 7$이다.

대충 대칭성에 의해 $\overline{CH} = 1$, $\overline{BC} = 8$이다.

COMMENT 28

함수 $f(x)$의 그래프는 [그림1]과 같다. $y = \frac{f(t)}{t}x$는 원점과 점 $(t,\ f(t))$를 지나는 직선이다.

얘가 곡선 $y = f(x)$에 위아래로 접할 때와 x축이 될 때가 필요하다. x축이 될 때는 $f(t) = 0$일 때다.

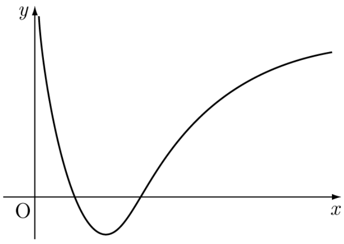
$(\ln t)^2 - 2\ln t = 0$에서 $t = 1$ 또는 $t = e^2$이다. 접할 때는 접선 $y = f'(t)(x - t) + f(t)$가 원점을 지날 때다.

직선 $y = \frac{2\ln t - 2}{t}(x - t) + \{(\ln t)^2 - 2\ln t\}$가 $(0,\ 0)$을 지나므로,

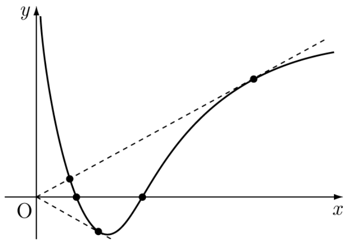
$0 = (\ln t)^2 - 4\ln t + 2$에서 $\ln t = 2 \pm \sqrt{2}$, $t = e^{2+\sqrt{2}}$ 또는 $t = e^{2-\sqrt{2}}$이다.

위쪽 접선과 곡선 $y = f(x)$는 접점이 아닌 교점을 가지며, $(t,\ f(t))$가 얘가 될 때도 $g(t)$가 불연속이 된다.

이를 그래프에 나타내면 [그림2]와 같다. $n = 5$이며, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = e^{2-\sqrt{2}}$, $\alpha_4 = e^2$, $\alpha_5 = e^{2+\sqrt{2}}$이다. α_1은 값을 구할 수 없다.



[그림1]



[그림2]

COMMENT 29

사탕을 나누어 넣는 개수로 분할하면

Case1) 3/2/0 $\Rightarrow$ ${}_5C_3 \times {}_3H_3$

Case2) 3/1/1 $\Rightarrow$ ${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times \frac{1}{2!} \times {}_3H_3$

Case3) 2/2/1 $\Rightarrow$ ${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_3H_4$

※ 서로 구별할 수 없는 상자이므로 사탕을 넣을 때는 분배가 아니라 분할만 하면 되고,
사탕을 넣고 나면 서로 구별 가능한 상자가 된다.

COMMENT 30

$f(x) = \int_0^x \sqrt{4 + \{f(t)\}^2}\,dt$에서 $f(0) = 0$, $f'(x) = \sqrt{4 + \{f(x)\}^2}$이다.

$f'(x) > 0$이고 $\{f'(x)\}^2 = 4 + \{f(x)\}^2$의 양 변을 미분하면 $f''(x) = f(x)$이다.

$\int_0^a \{f(x)\}^3 dx = \int_0^a \{f(x)\}^2 f''(x) dx = [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - \int 2f(x)\{f'(x)\}^2 dx$ (${\{f(x)\}^2}$을 미분, $f''(x)$를 적분하는 부분적분)

$$= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - \int 2f(x)[4 + \{f(x)\}^2]dx = [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2\int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8\int_0^a f(x)dx$$

$$= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2\int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8\int_0^a f''(x)dx = [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2\int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8[f'(x)]_0^a$$

$$= [\{f(x)\}^2 f'(x)]_0^a - 2\int_0^a \{f(x)\}^3 dx - 8[f'(x)]_0^a$$

이다. 이항하고 정리하면 $3\int_0^a \{f(x)\}^3 dx = \{f(a)\}^2 f'(a) - 8f'(a) + 16$이므로 $\int_0^a \{f(x)\}^3 dx = 27$이다.