07

구간 $[0,\ \infty)$에서 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$가
$f''(x)>0,\ f'(1)=1,\ f'(0)>0,\ f(0)=0$를 만족시킬 때,
〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(1)<f'(1)$

ㄴ. $0\le x\le 1$인 모든 x에 대하여 $f(x)f'(x)\le 1$이다.

ㄷ. $n>3$인 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{\{f(f(1))\}^n}{n}\le\int_0^{f(1)}\{f(x)\}^{n-2}dx$$ 이다.

① ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

√ 해설 158p

해설 172p

12

양의 실수 k와 함수 $f(x)=(x-k)^2+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_k^x \ln\{f(t)f(2k-t)\}\,dt$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\int_0^{2k} g(x)\,dx=0$

ㄴ. $\int_{k-2}^{k+2} \ln f(x)\,dx+g(k-2)=0$

ㄷ. $\int_k^{k+2} g(x)\ln f(x)\,dx=\left(\int_{k-2}^{k+2}\ln f(x)\,dx\right)^2$

① ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23

정의역이 $\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$인 함수 $f(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 0$

ㄴ. $f'(a) = 0$이면 $\tan 2a = \frac{1}{a}$이다.

ㄷ. 구간 $[0, \pi]$에서 방정식 $|f(x)| = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설 199p

50

√ 해설 284p

실수 $t\,(0<t<8)$와 함수 $f(x)=4\left|x^2+x\right|$에 대하여
집합 S는

$$S=\left\{x \mid f(\cos x)=t,\ 0<x<\frac{9}{2}\pi\right\}$$

이다. S의 모든 원소들의 합을 $g(t)$라 하자. 상수 $a, b\,(b\neq 0)$에 대하여
함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\boxed{g(a)+\lim_{t\to a-}g(t)=b\pi+\lim_{t\to a+}2g(t)}$$

$\dfrac{1}{\left\{g'\left(\dfrac{ab}{8}\right)\right\}^2}$ 의 값을 구하시오.

20

자연수 n에 대하여 두 집합 A, B는

$$A=\left\{x \mid \sin\frac{\pi}{2}x=\cos\frac{\pi}{2}x,\ 0<x<\frac{n}{2}\right\}$$

$$B=\left\{x \mid \sin\frac{\pi}{2}x=\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|,\ 0<x<\frac{n}{2}\right\}$$

이다. $A\cup B$의 모든 원소의 합이 90이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

√ 해설 58p

07

구간 $[0,\ \infty)$에서 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$가
$f''(x)>0$, $f'(1)=1$, $f'(0)>0$, $f(0)=0$ 를 만족시킬 때,
〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f(1)<f'(1)$

ㄴ. $0\le x\le 1$ 인 모든 x에 대하여 $f(x)f'(x)\le 1$ 이다.

ㄷ. $n>3$ 인 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{\{f(f(1))\}^n}{n}\le\int_0^{f(1)}\{f(x)\}^{n-2}dx$$ 이다.

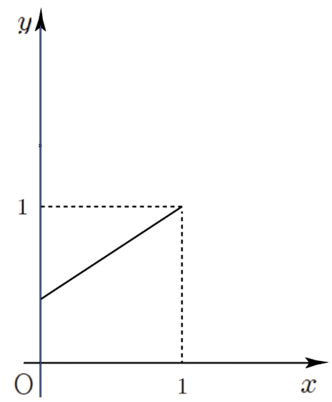
① ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제의도

① 도함수의 넓이는 원함수의 함수값의 차이와 같음을 아는가?
② ㄴ을 이용하여 ㄷ을 추론할 수 있는가?
③ 대략적인 $f(x)$와 $f'(x)$ 개형을 그릴 수 있는가?

해설강의

우선 주어진 조건에 따라 $f'(x)$ 를 그려봅시다~
$f''(x)>0$이기 때문에 $f'(x)$는 증가하고, $(1,\ 1)$을 지나고, $f'(0)>0$ 이니까
$f'(x)$를 그리면



보충 설명 +α

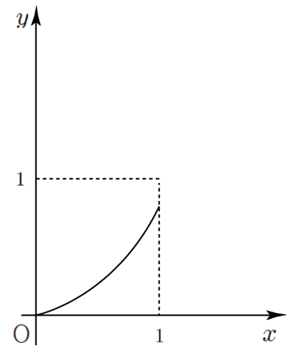
$f(x)$ 도 그려봅시다~

$f''(x)>0$ 이니까 아래로 볼록 형태이고 양수에서 $f'(x)>0$ 이니까 증가함수형태가 나오겠죠? 또한 원점도 지나야 합니다~

여기서 $f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(x)\,dx\ <1$ 때문에 $f(1)<1$ 이 됩니다.

(수학2에서 했었죠? 원함수가 얼마만큼 증가하는가? 도함수의 넓이만큼 증가!)

$f(x)$ 를 그리면



따라서 ㄱ조건은 당연히 맞겠죠? ㅎㅎ

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 둘다 주어진 범위에서 증가함수이니까 최댓값만 비교하면 되겠군요.

$f(1)f'(1)\ \le 1$ 참!

따라서 ㄴ도 맞습니다~

ㄱㄴㄷ 문제를 풀 때는 항상 ㄱㄴㄷ이 긴밀히 연관되어 있다는 생각을 해야돼요~

ㄴ을 이용해서 ㄷ을 풀어봅시다~

ㄴ조건에서 양변에 $\{f(x)\}^{n-2}$를 곱해봅시다.

$f(x)^{n-1}f'(x)\ \le\ f(x)^{n-2}$

1) 양변에 정적분을 취하면

$$\int_0^{f(1)} f(x)^{n-1}f'(x)\,dx \le \int_0^{f(1)}\{f(x)\}^{n-2}dx$$

$$\left[\frac{f(x)^n}{n}\right]_0^{f(1)}\ \le \int_0^{f(1)}\{f(x)\}^{n-2}dx$$

$$\frac{\{f(f(1))\}^n}{n}\le \int_0^{f(1)}\{f(x)\}^{n-2}dx$$

따라서 ㄷ도 참이겠죠 ㅎㅎ

답은 ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

출제자의 한마디

주어진 조건으로 $f(x)$, $f'(x)$를 그려보셨나요? 이문제의 메인 출제의도는 ㄱ이였습니다. 수학2에서 연습했었죠? ㅎㅎ쉽게 구하셨으리라 믿습니다.

ㄱ을 다른 각도로 접근해볼게요~

$f''(x)>0$ 이므로 $f'(x)$는 증가이죠? $f'(1)=1$ 인데 만약 $f(1)\ge 1$이면 $f(0)=0$ 이므로 평균값 정리에 의해 $f'(c)\ge 1$인 어떤 실수 c가 열린 구간 $(0,\ 1)$에 적어도 하나 존재하므로 $f'(x)$이 증가라는 것에 모순되죠?

따라서 $f(1)<1$ 이 됩니다.

ㄱㄴㄷ문제는 ㄱㄴㄷ이 긴밀히 연관되어 있을 확률이 높아요. 바로 ㄷ을 구하는 것이 어렵기 때문에 “답으로 가는 징검다리를 놓아줄게“와 비슷한 관계입니다 ㅎㅎ ㄴ에서 ㄷ과 유사성을 살펴서 양변에 $f^{n-2}(x)$ 곱하는 행위를 할 수 있는지를 물어보고 싶었습니다. 개인적으로 괜찮은 준킬러 문제라고 생각합니다 ㅎㅎ

보충 설명 +α

1) 부등식 양변에 정적분을 취해도 되는 걸까요?

$f(x)\ \ge g(x)$ 이면

$\int_a^b f(x)\,dx\ \ge\ \int_a^b g(x)\,dx$

일 까요? $(a<b)$

$\int_a^b f(x)\,dx$

$-\int_a^b g(x)\,dx\ \ge 0$

$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\ dx\ \ \ge 0$

$f(x)-g(x)\ =h(x)$ 라고 보면 $f(x)\ \ge g(x)$ 에 의해서 $h(x)\ \ \ge 0$ 겠죠?

0보다 크거나 같은 값을 정적분하면 당연히 0보다 크거나 같으니까 성립하겠군요.

$\int_a^b h(x)\ dx\ \ge 0$

보충 설명 +α

12

양의 실수 k와 함수 $f(x)=(x-k)^2+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_k^x \ln\{f(t)f(2k-t)\}\,dt$$

라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $\displaystyle\int_0^{2k} g(x)\,dx=0$

ㄴ. $\displaystyle\int_{k-2}^{k+2} \ln f(x)\,dx+g(k-2)=0$

ㄷ. $\displaystyle\int_k^{k+2} g(x)\ln f(x)\,dx=\left(\int_{k-2}^{k+2} \ln f(x)\,dx\right)^2$

① ㄴ　② ㄴ, ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제의도

① $f(x)=f(2k-x)$ 임을 파악할 수 있는가?
② $g(x)+g(2k-x)=0$ 임을 파악할 수 있는가?
③ $\ln f(x)=\dfrac{g'(x)}{2}$ 임을 이용해서 ㄷ을 구할 수 있는가?

해설강의

상당히 복잡해 보이지만 주어진 조건을 이용해서 천천히 구해봅시다 ㅎㅎ
$f(x)=(x-k)^2+1$ 이니 $f(2k-x)=f(x)$ 겠죠?

$$g(x)=\int_k^x \ln\{f(t)f(2k-t)\}\,dt=\int_k^x \ln\{f(t)\}^2\,dx=\int_k^x 2\ln|f(t)|\,dt$$

$f(x)>0$ 이니까 $g(x)=\displaystyle\int_k^x 2\ln f(t)\,dt$ 겠군요.

ㄱ을 보면 $g(x)$ 의 적분식으로 되어있네요.
$\ln f(x)$ 를 직접 적분해서 $g(x)$ 를 구할 수도 없고... 어떻게 해야 될까요?

바로 $g(x)$ 의 대칭성을 조사하는 것입니다~

$g(x)=\int_k^x 2\ln f(t)\,dt$ 를 미분하면 $g'(x)=2\ln f(x)$

$f(2k-x)=f(x)$ 이기 때문에 $g'(x)=g'(2k-x)$ 겠죠?
양변 부정적분하면 $g(x)=-g(2k-x)+c$, $g(k)=0$ 이니까 $c=0$
$\therefore g(x)+g(2k-x)=0$

아~ $g(x)$ 가 $(k,\ 0)$ 에 대칭되어 있겠군요. 양변에 $\int_0^k$ 를 걸면

$$\int_0^k g(x)\,dx+\int_0^k g(2k-x)\,dx=\int_0^k g(x)\,dx+\int_k^{2k} g(x)\,dx=\int_0^{2k} g(x)\,dx=0$$

따라서 ㄱ은 참이겠군요 ㅎㅎ

$\ln f(x)=\dfrac{g'(x)}{2}$ 이니까

$$\int_{k-2}^{k+2}\ln f(x)\,dx+g(k-2)=\int_{k-2}^{k+2}\frac{g'(x)}{2}\,dx+g(k-2)=\frac{g(k+2)+g(k-2)}{2}$$

ㄱ에서 $g(x)+g(2k-x)=0$ 이니까 $x=k+2$ 를 넣으면
$g(k+2)+g(k-2)=0$ 이니 ㄴ도 참이겠군요~

ㄴ을 다른 각도로 풀어봅시다~

$\dfrac{1}{2}g(x)=\int_k^x \ln f(t)\,dt$ 이므로 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ 임을 활용하면

$\dfrac{g(k+2)-g(k-2)}{2}=\int_{k-2}^{k+2}\ln f(t)dt$ 겠죠? $g(x)$ 는 $(k,\ 0)$에 대칭이므로

$g(k+2)+g(k-2)=0$ 겠군요. 따라서 ㄴ이 참이겠죠? ㅎㅎ

$\ln f(x)=\dfrac{g'(x)}{2}$ 이고 $g(k)=0$ 이니까

$$\int_k^{k+2} g(x)\ln f(x)\,dx=\int_k^{k+2} g(x)\frac{g'(x)}{2}\,dx=\left[\frac{\{g(x)\}^2}{4}\right]_k^{k+2}=\frac{\{g(k+2)\}^2}{4}$$

ㄴ이 참이고 $g(k+2)+g(k-2)=0$ 이니까

$\left(\int_{k-2}^{k+2}\ln f(x)\,dx\right)^2=\{g(k-2)\}^2=\{g(k+2)\}^2$ 겠군요~

$\dfrac{\{g(k+2)\}^2}{4}\neq\{g(k+2)\}^2$ 이니까 ㄷ은 거짓이겠죠? ㅎ

답은 ③ ㄱ, ㄴ

출제자의 한마디

약간 까다롭게 느낄만한 20번대 문제였습니다. 적분이 안 되는 식을 대칭성을 이용해서 처리하는 것을 물어보고 싶었습니다 ㅎ 대칭성을 파악해서 ㄱ을 풀지 못했다면 조금 어렵게 느낄만한 문제였습니다~ 다른 각도에서 접근하는 비슷한 문항으로 2010학년도 수능 수리 가형 29번 문제도 한번 풀어보셨으면 좋겠습니다 ㅎ

보충 설명 +α

23

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le \pi\}$인 함수 $f(x) = \sin 2x + 2x\cos 2x$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

ㄱ. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 0$

ㄴ. $f'(a) = 0$ 이면 $\tan 2a = \frac{1}{a}$ 이다.

ㄷ. 구간 $[0,\ \pi]$ 에서 방정식 $|f(x)| = 1$의 서로 다른 실근의 개수는 5 이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제의도

① $f'(x) = 4x\cos 2x\left(\frac{1}{x} - \tan 2x\right)$를 통해 도함수의 부호변화 판단하기

($4x\cos 2x$와 $\frac{1}{x} - \tan 2x$를 모두 고려해서 판단하기)

② $f(x)$의 그래프를 그릴 수 있는가?

보충 설명 $+\alpha$

해설강의

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$이고 $f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -1$이므로 ㄱ은 당연히 참이겠죠?ㅎ
ㄱㄴㄷ 문제는 ㄱㄴㄷ이 유기적으로 연결되어 있다고 생각을 해야한다고
저번문제에서 언급했었는데 기억나시죠?ㅎ

이를 항상 생각하면서 조건을 분석해봅시다~

ㄴ. $f'(a) = 0$이면 $\tan 2a = \frac{1}{a}$라고 했군요.우선 미분부터 해봅시다~

$f'(x) = 4\cos 2x - 4x\sin 2x$
tan가 나오게 하기 위해서 $4x\cos 2x$로 묶어봅시다~

$f'(x) = 4x\cos 2x\left(\frac{1}{x} - \tan 2x\right)$

보충 설명 +α

$f'(x)=4x\cos2x\left(\frac{1}{x}-\tan2x\right)$이 0이 되려면

$4x\cos2x$가 0이 되거나 $\frac{1}{x}-\tan2x$가 0이 되어야겠죠?

$4x\cos2x$가 0이 되는 x값들은 0 or $\frac{\pi}{4}$ or $\frac{3}{4}\pi$ 인데

이 x값들은 $\frac{1}{x}-\tan2x$에서 정의되지 않으므로

$f'(x)=4\cos2x-4x\sin2x$에 각각 대입해봅시다~

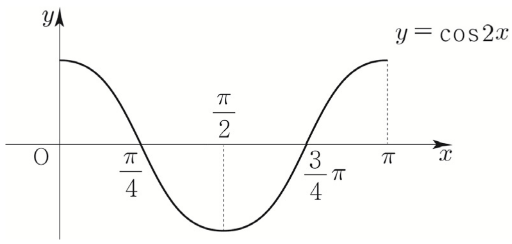
$f'(0)\neq0$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\neq0$, $f'\left(\frac{3}{4}\pi\right)\neq0$ 이므로 결국

$f'(a)=0$이 되려면 $\frac{1}{a}-\tan2a=0$ 이어야 하므로 ㄴ이 참이겠군요~

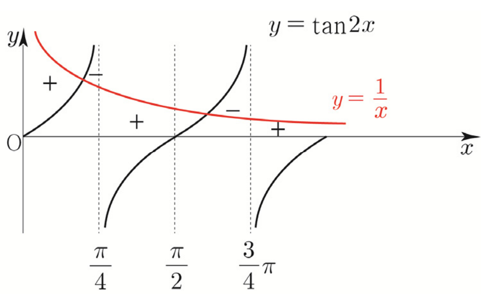
이제 대망의 ㄷ을 구해봅시다~

먼저 $f(x)$를 그리기 위해서 ㄴ에서 구했던 $f'(x)=4x\cos2x\left(\frac{1}{x}-\tan2x\right)$를 활용해봅시다~

여기서 조심해야할 부분은 부호를 판단하는 것이 $\left(\frac{1}{x}-\tan2x\right)$뿐만 아니라 $\cos2x$도 있다는 것입니다~ (여기서 $4x$는 $x>0$이므로 항상 양수겠죠?)



$\frac{1}{x}-\tan2x$의 부호를 판단할 때는 저번에 배웠던 빼기 technic을 사용하면



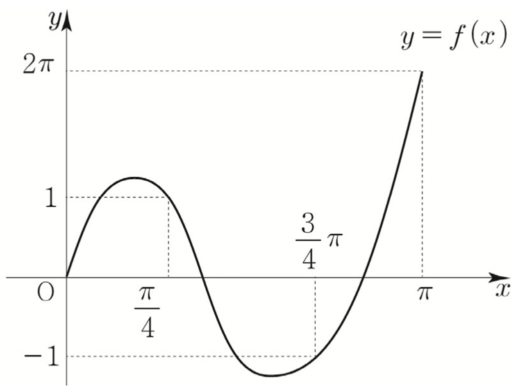
$0<x<\frac{\pi}{4}$에서는 $\cos2x>0$이므로 전체적인 부호가 똑같이 + − 이죠?

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$에서는 $\cos2x<0$이므로 전체적인 부호가 − +로 변하겠죠?

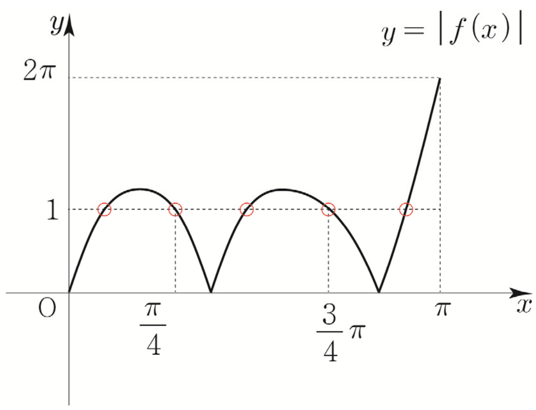
$\frac{3}{4}\pi<x<\pi$에서는 $\cos2x>0$이므로 전체적인 부호가 +가 되겠군요~

$f(0)=0,\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1,\ f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)=-1,\ f(\pi)=2\pi$

이를 바탕으로 $f(x)$를 그려봅시다~



따라서 $y=|f(x)|$를 그리면 아래와 같겠죠?



두 함수 $y=|f(x)|$, $y=1$의 교점이 다섯 개이므로 ㄷ은 참이 되겠군요~

답은 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

출제자의 한마디

이번에는 빼기 technic을 사용해보셨나요? ㅎ 이 문제에서 조심해야할 부분은 부호를 판단하는 것이 $\left(\dfrac{1}{x}-\tan 2x\right)$뿐만 아니라 $\cos 2x$도 있다는 것이었죠? 동시에 부호변화를 고려하는 것이 point인 문제였습니다~
ㄱ,ㄴ,ㄷ을 풀 때는 ㄱ,ㄴ,ㄷ이 유기적으로 연결되어 있다는 생각을 반드시 해야 한다고 했었죠? ㅎ 이 문제에서도 ㄷ을 풀 때 ㄱ,ㄴ이 쓰이는 것을 쉽게 확인할 수 있었습니다~ ($f'(x)=4\cos 2x-4x\sin 2x$의 부호를 판단할 때, 두 함수 $y=4\cos 2x$, $y=4x\sin 2x$를 이용하여 빼기함수 technic을 사용하셔도 굿입니다~)

보충 설명 +α

50

실수 $t\,(0<t<8)$와 함수 $f(x)=4\left|x^2+x\right|$에 대하여
집합 S는

$$S=\left\{x \mid f(\cos x)=t,\ 0<x<\frac{9}{2}\pi\right\}$$

이다. S의 모든 원소들의 합을 $g(t)$라 하자. 상수 $a, b\,(b\neq 0)$에 대하여
함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$g(a)+\lim_{t\to a-} g(t)=b\pi+\lim_{t\to a+} 2g(t)$$

$\dfrac{1}{\left\{g'\left(\dfrac{ab}{8}\right)\right\}^2}$ 의 값을 구하시오.

출제의도

① $f(\cos x)$의 그래프를 그릴 수 있는가?
② $g(t)$를 구할 수 있는가? (by 대칭성)
③ 역함수 미분법

보충 설명 +α

해설강의

S의 모든 원소들의 합을 구하라고 했기 때문에 $=y$를 붙여서 그래프를 그린 후
대칭성으로 처리해주는 것이 유리하겠죠? ㅎㅎ

그렇게 하려면 $f(\cos x)$의 그래프를 그려야 하는데 만만치 않아보입니다-_-;;
우선 함수의 특성부터 파악해봅시다~

모든 실수 x에 대하여
$f(\cos(x+2\pi))=f(\cos x)$이기 때문에 주기가 2π인 주기함수이고
$f(\cos(2\pi-x))=f(\cos x)$이기 때문에 $x=\pi$에 대하여 대칭된 그래프가 나오겠죠?
($f(x)$보다는 $\cos x$의 특성이 $f(\cos x)$의 특성에 영향을 주는군요~)

$f(\cos x)=4\left|\cos^2 x+\cos x\right|=\left|4\cos^2 x+4\cos x\right|$ 이므로

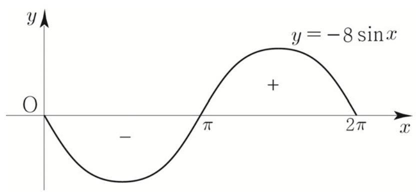
$h(x)=4\cos^2 x+4\cos x$라 하면

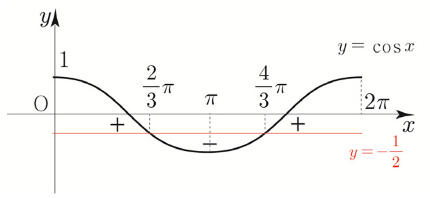
$h'(x)=8\cos x(-\sin x)-4\sin x=-8\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$

$(-8\sin x)$와 $\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$의 부호를 모두 고려하는 것은

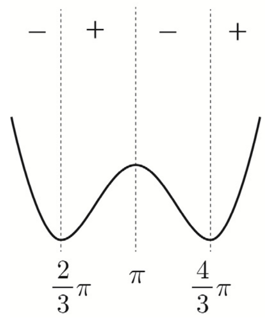
미적분 23번에서 이미 학습했었죠?

$\cos x+\frac{1}{2}$는 $\cos x-\left(-\frac{1}{2}\right)$라 보고 빼기함수 technic으로 처리해봅시다~



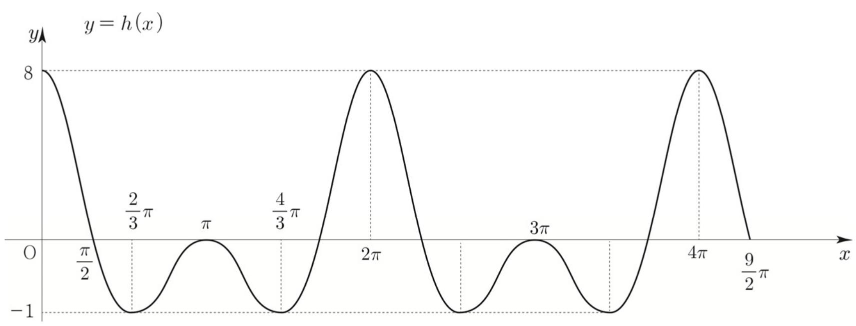


$h'(x)$의 부호를 바탕으로 $h(x)$를 그리면

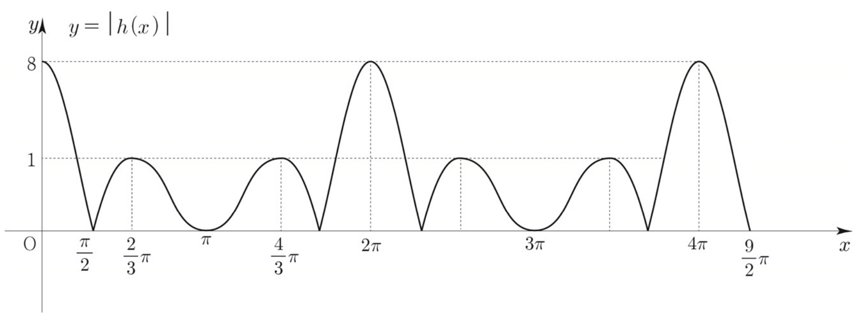


$h(x)$는 $x=\pi$에 대하여 대칭이고 주기가 2π인 것을 바탕으로 $h(x)$를 그리면

$\left(h(0)=8,\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ h\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-1\right)$



$y=|h(x)|$를 그려봅시다~



보충 설명 +α

$$g(a)+\lim_{t\to a-}g(t)=b\pi+\lim_{t\to a+}2g(t)$$

만약 $g(t)$가 $t=a$에서 연속이라면 $\lim_{t\to a+}g(t)=\lim_{t\to a-}g(t)=g(a)$ 이므로

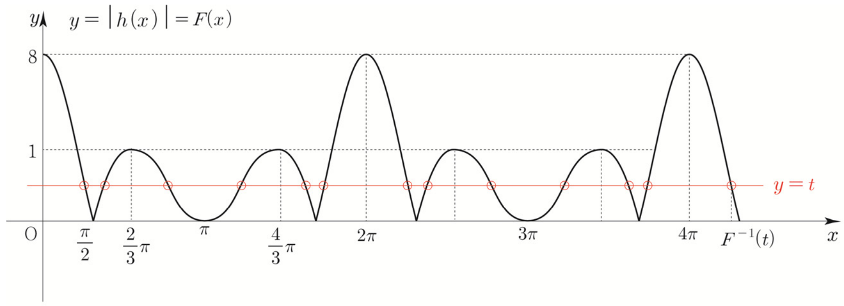
$g(a)+g(a)=b\pi+2g(a) \Rightarrow b=0$

하지만 문제전제조건에서 $b\neq0$인 상수라고 했으니 모순이겠죠?
즉, $g(t)$는 $t=a$에서 불연속해야합니다~

따라서 $a=1$일 수밖에 없겠죠?

이제 구간에 따라 case분류하면서 $g(t)$를 구해봅시다~
$F(x)=|h(x)|$라 하면

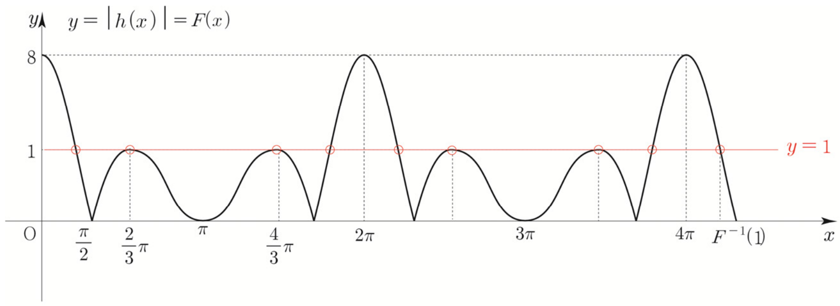
① $0<t<1$



대칭성을 이용하면

$g(t)=2\pi\times3+6\pi\times3+F^{-1}(t)=24\pi+F^{-1}(t)$

② $t=1$

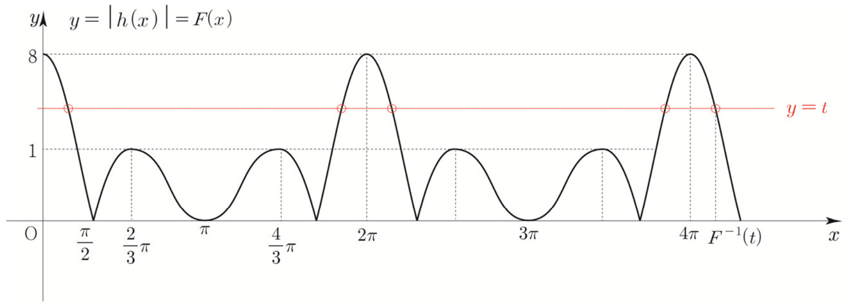


대칭성을 이용하면

$g(1)=16\pi+F^{-1}(1)$

보충 설명 $+\alpha$

③ $1<t<8$



대칭성을 이용하면

$$g(t)=2\pi+6\pi+F^{-1}(t)=8\pi+F^{-1}(t)$$

이제 $g(1)+\lim_{t\to1-}g(t)=b\pi+\lim_{t\to1+}2g(t)$를 바탕으로 b를 찾아봅시다~

$F^{-1}(t)$는 연속이므로 $\lim_{t\to1+}F^{-1}(t)=\lim_{t\to1-}F^{-1}(t)=F^{-1}(1)$

$$g(1)+\lim_{t\to1-}g(t)=b\pi+\lim_{t\to1+}2g(t)$$

$\Rightarrow 16\pi+F^{-1}(1)+24\pi+F^{-1}(1)=b\pi+16\pi+2F^{-1}(1)$

$\Rightarrow b=24$

결국 우리가 구하고 싶은 것이 $\dfrac{1}{\left\{g'\left(\frac{ab}{8}\right)\right\}^2}=\dfrac{1}{\{g'(3)\}^2}$ 이므로

$g'(3)$을 구해봅시다~

$g(t)=8\pi+F^{-1}(t)\ \ (1<t<8)$

결국 역함수 미분법을 물어보는 문제였군요~

우리가 구했던 $F^{-1}(t)$은 $4\pi<F^{-1}(t)<\frac{9}{2}\pi$이었지만

주기성이 보장되는 상황이니까 $0<F^{-1}(t)<\frac{\pi}{2}$에서 구해도 되겠죠?

즉, 멀리가지 않고 0에서 $\frac{\pi}{2}$까지만 체크해봅시다~

$F(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 양수이니 $F(x)=4\cos^2x+4\cos x$와 같겠죠?

$4\cos^2x+4\cos x=3 \Rightarrow (2\cos x-1)(2\cos x+3)=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}$

즉, $x=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

이제 마무리해봅시다~

보충 설명 +α

보충 설명 +α

$$F'(x) = -8\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$g'(3) = \frac{1}{F'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-8\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{-4\sqrt{3}}$$

따라서 $\frac{1}{\{g'(3)\}^2} = 48$이겠죠?ㅎ

답은 48

다른 관점의 풀이를 소개해보겠습니다.

$f(x) = 4|x^2+x|$에 대하여

$f(\cos\alpha(t)) = t,\ 0 < \alpha(t) < \frac{\pi}{2}$을 만족시키는 $\alpha(t)$를 정의해봅시다~

실질적으로 방정식 $f(\cos x) = t$를 해석하기 위함이니 $f(x)$의 정의역을 $-1 \le x \le 1$라 해도 되겠죠?

① $1 < t < 8$일 때는 $f(x) = t\,(-1 \le x \le 1)$ 가 오직 하나의 실근을 가지겠죠?
그 실근을 $x_1(0 < x_1 < 1)$이라 하면 $x_1 = \cos\alpha(t)$일 때만 성립한다는 것을 알 수 있습니다.

이때의 $g(t)$는 방정식 $\cos x = \cos\alpha(t)\left(0 < x < \frac{9}{2}\pi\right)$의 실근의 합이 되겠죠?

(여기서 실근은 x를 의미합니다~)

삼각함수의 대칭성에 의해 $g(t) = \alpha(t) + 2\pi\times 2 + 4\pi\times 2 = \alpha(t) + 12\pi\ \ (1 < t < 8)$ 임을 알 수 있습니다.

② $t = 1$일 때는 $f(x) = t\,(-1 \le x \le 1)$가 두 개의 실근을 가지므로 $f(\cos x) = 1$을 만족시키려면 $\cos x = -\frac{1}{2}$이거나 $\cos x = \cos\alpha(1)$이어야 하겠죠?

삼각함수의 대칭성에 의하여 방정식 $\cos x = -\frac{1}{2}\ \left(0 < x < \frac{9}{2}\pi\right)$의 실근의 합은 $\pi\times 2 + 3\pi\times 2 = 8\pi$이고 방정식 $\cos x = \cos\alpha(1)\ \left(0 < x < \frac{9}{2}\pi\right)$의 실근의 합은 $\alpha(1) + 2\pi\times 2 + 4\pi\times 2 = \alpha(1) + 12\pi$이겠죠?

따라서 $g(1) = 8\pi + 12\pi + \alpha(1) = 20\pi + \alpha(1)$임을 알 수 있습니다.

③ $0 < t < 1$일 때는 $f(x) = t\,(-1 \le x \le 1)$가 세 개의 실근을 가지겠죠?
세 실근을 $x_1(0 < x_1 < 1)$, $x_2(-1 < x_2 < 0)$, $x_3(-1 < x_3 < 0)$라 해봅시다~

위와 같은 방식으로 각각의 경우에 대해 실근의 합을 구해봅시다~

$x_1 = \cos\alpha(t) \Rightarrow \alpha(t) + 12\pi\ \ (1 < t < 8)$

$x_2 = \cos\alpha(t) \Rightarrow 8\pi$

$x_3 = \cos\alpha(t) \Rightarrow 8\pi$

따라서 $g(t)=8\pi+8\pi+12\pi+\alpha(t)=28\pi+\alpha(t)\,(1<t<8)$임을 알 수 있습니다.

이후로 a, b 구하는 방식은 동일하고 $g'(3)$을 구할 때는 역함수의 미분법이
아닌 합성함수의 미분법을 이용해 처리하면 되겠죠?
물론 맥락은 같습니다.
즉, $f(\cos\alpha(t))=t$, $f'(\cos\alpha(t))\times(-\sin\alpha(t))\times\alpha'(t)=1$을 이용하면 되겠죠?

출제자의 한마디

$f(\cos x)$의 그래프를 그릴 수 있는지 물어보고 싶었습니다. ㅎㅎ
$\cos x$의 특성이 $f(\cos x)$에 반영되는 것도 챙겨갑시다~~

대칭성도 활용해야하고 역함수 미분법도 들어간 복합적인 문제였죠?
주기성을 이용하여 $4\pi<F^{-1}(t)<\dfrac{9}{2}\pi$를 $0<F^{-1}(t)<\dfrac{\pi}{2}$로 바꿔서 풀어보셨나요? ㅎㅎ 잘하셨습니다~~ 두 번째 풀이도 챙겨가도록 합시다~

개인적으로 마음에 드는 문제 중 하나입니다 :D

보충 설명 $+\alpha$

20

자연수 n에 대하여 두 집합 A, B는

$$A=\left\{x \mid \sin\frac{\pi}{2}x=\cos\frac{\pi}{2}x,\ 0<x<\frac{n}{2}\right\}$$

$$B=\left\{x \mid \sin\frac{\pi}{2}x=\left|\cos\frac{\pi}{2}x\right|,\ 0<x<\frac{n}{2}\right\}$$

이다. $A\cup B$의 모든 원소의 합이 90이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

출제의도

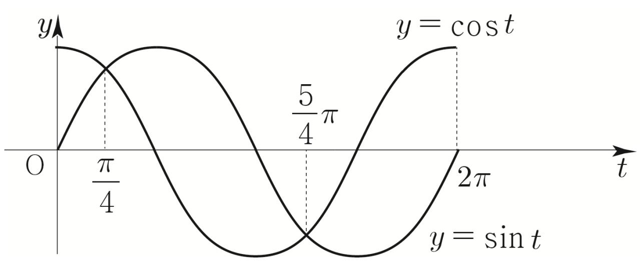
① 삼각방정식과 주기를 통해 $A\cup B$를 구할 수 있는가?

② 실수하는 point 조심 ! $\left(0<x<\frac{n}{2}\right)$

해설강의

우선 A 집합을 구해봅시다~

방정식 $\sin t=\cos t\ (t>0)$의 실근을 구하면



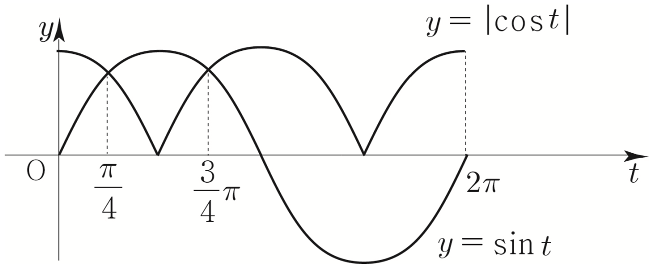
$t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{13}{4}\pi,\ \cdots$ 이겠죠? x로 변환해봅시다~

$\frac{\pi}{2}x=t \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{2},\ \cdots$

마찬가지로 B집합을 구해봅시다~

보충 설명 +α

방정식 $\sin t = |\cos t|$ $(t>0)$의 실근을 구하면



$t=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{9}{4}\pi,\ \frac{11}{4}\pi,\ \cdots$ 이겠죠? x로 변환해봅시다~

$\frac{\pi}{2}x=t \Rightarrow x=\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ \cdots$

$A\cup B$를 구하면 (한주기 마다 /)

$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\ /\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ \frac{13}{2}\ /\ \cdots$

한 주기 마다 합을 구해주면

$\frac{9}{2},\ \frac{33}{2},\ \frac{57}{2},\ \frac{81}{2},\ \cdots$

$\frac{9+33+57+81}{2}=90$이므로 결국 4번째 주기까지 다 더해주면 되겠군요~

4번째와 5번째 주기에서 $A\cup B$를 구해주면 $\frac{25}{2},\ \frac{27}{2},\ \frac{29}{2}\ /\ \frac{33}{2},\ \frac{35}{2},\ \frac{37}{2}$

처음에 전제조건이 $0<x<\frac{n}{2}$이므로 $n=30,\ 31,\ 32,\ 33$까지 가능하겠죠? ㅎㅎ

따라서 $30+31+32+33=126$이 답이겠군요~

답은 126

출제자의 한마디

삼각방정식과 수열의 통합형 문제로 만들어보았습니다~ ㅎㅎ

$0<x<\frac{n}{2}$이기 때문에 $n=29$가 될 수 없고 $n=33$은 가능하겠죠?

아마 33을 포함시키지 않아 틀리신 분이 많을 것 같아요.

조건을 꼼꼼히 보고 실수하지 않도록 유의합시다! :D

보충 설명 +α