제 2 교시

2019학년도 대학수학능력시험 모의평가 2회 문제지

수학 영역
(가형)

성명	

수험번호								

○ 자신이 선택한 유형('가'형 / '나'형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

기다림의 끝에는 언제나 빛이 있으니까

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 유형('가'형 / '나'형), 답을 정확히 표기하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Epsilon

2018년 11월 4일 시행

Epsilon 모의고사 2회 (가형)

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon
16학번 : 김민지
17학번 : 김국연, 김도훈, 김동규, 김정빈, 문혁준
박승용, 석진우, 조영호
18학번 : 권세은, 김동현, 김성찬, 김윤태, 김종해
안동우, 이현준, 정우진

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회
17학번 : 김정빈, 석진우
18학번 : 권세은, 이현준

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관해 문의 사항이 있으신 경우 0426wnsl@gmail.com으로 연락주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(가 형)

성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 3)$, $\vec{b}=(2,\ -1)$에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

3. $\displaystyle\int_0^1 3^{x+1}dx$ 의 값은? [2점]

① $\frac{3}{\ln 3}$ ② $\frac{4}{\ln 3}$ ③ $\frac{5}{\ln 3}$ ④ $\frac{6}{\ln 3}$ ⑤ $\frac{7}{\ln 3}$

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4},\qquad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5. 자연수 6을 3개 이하의 자연수로 분할하는 방법의 수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

6. 곡선 $\ln(x^3y)+xy=3$ 위의 점 $\left(e,\ \frac{1}{e}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $-\frac{1}{e^2}$ ② $-\frac{2}{e^2}$ ③ $-\frac{3}{e^2}$ ④ $-\frac{4}{e^2}$ ⑤ $-\frac{5}{e^2}$

7. $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 일 때, 방정식

$$\frac{1}{2}\tan x+\cos x=\sec x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{7\pi}{6}$ ② $\frac{4\pi}{3}$ ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ $\frac{5\pi}{3}$ ⑤ $\frac{11\pi}{6}$

8. 쌍곡선 $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$의 두 초점 사이의 거리가 10일 때, 이 쌍곡선의 두 점근선이 x축과 만나는 점을 각각 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ $(\alpha<\beta)$라 하자. $\beta-\alpha$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 1 ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ 2

9. 부등식

$$\log_2(x+2) \le \log_4(|x|+4)$$

를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

10. 어느 공장에서 생산하는 시계 1개의 무게는 평균이 120 g이고 표준편차가 1.6 g인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산한 시계 중 임의추출한 16개의 시계의 무게의 표본평균이 121 g 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

① 0.0062 ② 0.0122 ③ 0.0166 ④ 0.0198 ⑤ 0.0228

11. 좌표공간에서 점 $\mathrm{P}(-1, 4, 2)$를 지나는 직선 l과 평면 $\alpha : 2x-y-2z=0$이 한 점에서 만날 때 두 도형이 이루는 예각의 크기를 θ라 하고 직선 l과 평면 α의 교점을 A라 하자. $\sin\theta=\frac{5}{6}$일 때, 선분 AP의 길이는? [3점]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

12. 주사위를 세 번 던져서 나온 눈의 수를 차례대로 a, b, c라 할 때, $a^{|b-c|}$의 값이 홀수일 경우의 수는? [3점]

① 124　② 126　③ 128　④ 130　⑤ 132

13. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x-3$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $g'(a)=\frac{1}{5}$을 만족시키는 a의 값을 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 할 때, $\beta-\alpha$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 $\mathrm{P}(x,\ y)$가

$$x=e^{-kt},\qquad y=t^3-12kt$$

이다. 시각 $t=1$에서 점 P의 속도 $\vec{v}$와 가속도 $\vec{a}$가 서로 평행하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? (단, $k\neq 0$) [4점]

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

15. $\int_1^2 \ln(x^3+3x^2+2x)dx$ 의 값은? [4점]

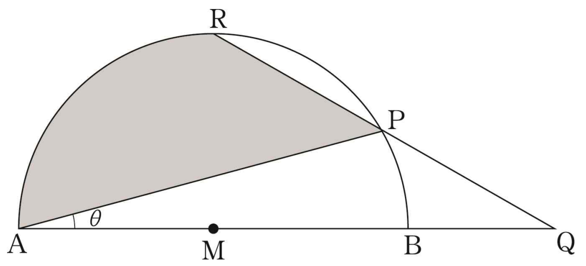
① $8\ln 2-1$ ② $8\ln 2-2$ ③ $8\ln 2-3$
④ $8\ln 2-4$ ⑤ $8\ln 2-5$

16. 책상 위에 사탕 11개가 있다. A와 B가 각각 주사위 한 개씩을 던져 두 주사위의 눈의 차가 홀수일 경우 주사위 눈의 차만큼 A가 책상 위의 사탕을 가져가고, 그 외의 경우 A가 책상 위의 사탕을 한 개 가져가는 게임을 한다고 하자. 이 게임을 2회 반복한 후 책상 위에 남은 사탕을 B가 가져간다고 할 때, A가 가져간 사탕이 B가 가져간 사탕보다 많을 확률은? [4점]

① $\frac{7}{81}$ ② $\frac{8}{81}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{10}{81}$ ⑤ $\frac{11}{81}$

17. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점 M, 반원 위의 점 P에 대하여 직선 AB 위의 점 Q를 $\overline{PQ}=\overline{PM}$이 되도록 잡는다. $\angle PAB=\theta$일 때, 직선 PQ와 호 AP의 교점 중 P가 아닌 점을 R라 하고 색칠한 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{8}$이고 $\overline{AQ}>\overline{BQ}$이다.) [4점]



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

18. 좌표공간에 원 $C_1 : x^2+y^2=9,\ z=2\sqrt{3}$ 위의 점 A와 원 $C_2 : x^2+y^2=9,\ z=-2\sqrt{3}$ 위의 점 B를 $\overline{AB}=5\sqrt{3}$이 되도록 잡는다. 원 C_1 위의 A가 아닌 점 P에 대하여 평면 ABP와 xy평면이 이루는 이면각의 크기가 최소일 때, 삼각형 ABP의 넓이는? [4점]

① $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ④ $7\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

19. 자연수 n에 대하여 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$과 $|x_k| \le n$ $(k=1,\ 2,\ 3)$을 만족시키는 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $|x_k| \le n$이므로 $-n \le x_k \le n$이다. $(k=1,\ 2,\ 3)$
>
> (ⅰ) $x_1,\ x_2,\ x_3$가 전부 음이 아닌 정수인 경우
> 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x_1,\ x_2,\ x_3$의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (ⅱ) $x_1,\ x_2,\ x_3$ 중 음의 정수가 1개인 경우
> $x_1=-t$ $(1 \le t \le n)$이라 하자.
> $x_2+x_3=n+t$이고, $0 \le x_2 \le n$, $0 \le x_3 \le n$이므로
> (x_2, x_3)의 순서쌍의 개수는 $\boxed{(나)}-t$이다.
> 따라서 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 중 음의 정수가 1개일 때,
> 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$을 만족시키는 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 $3 \times \sum_{t=1}^{n}\left(\boxed{(나)}-t\right)$이다.
>
> (ⅲ) $x_1,\ x_2,\ x_3$ 중 음의 정수가 2개 이상인 경우
> $x_1=-t_1$ $(1 \le t_1 \le n)$, $x_2=-t_2$ $(1 \le t_2 \le n)$
> 이라 하자. $n<n+t_1+t_2=x_3$이므로
> 이를 만족시키는 x_3는 존재하지 않는다.
> 따라서 $x_1,\ x_2,\ x_3$ 중 음의 정수가 2개 이상일 때,
> 방정식 $x_1+x_2+x_3=n$을 만족시키는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)는 존재하지 않는다.
>
> 따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
> $$a_n=\boxed{(가)}+3\times\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{(나)}-k\right)$$
> 이므로
> $$\sum_{n=1}^{5} a_n=\boxed{(다)}$$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $\dfrac{a}{f(4)+g(4)}$의 값은? [4점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 도함수를 갖는 함수 $f(x)$에 대하여 $g(x)=\int_0^x f(t)dt+1$이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양수 x에 대하여 $\{g(x)\}^2-\{f(x)\}^2=1$이다.
> (나) 모든 양수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

> <보 기>
> ㄱ. 모든 양수 x에 대하여 $g(x)=f'(x)$이다.
> ㄴ. 모든 양수 x에 대하여 $f'(x)>1$이다.
> ㄷ. 자연수 n에 대하여 $x=0$에서 $x=n$까지의 곡선 $y=g(x)$의 길이는 $f(n)$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(6+x)+f(6-x)=0, \qquad \int_0^6 f(t)\,dt=\int_3^9 |f(t)|\,dt$$

를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$은 오직 하나의 실근을 갖고, 두 함수 $f(x)$와 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_0^3 F(t)\,dt+\int_3^9 tf(t)\,dt=0$
(나) $\int_0^6 F(t)\,dt=3\int_0^6 f(t)\,dt$

$\int_0^9 F(t)\,dt=k\int_0^9 f(t)\,dt$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

단답형

22. ${}_9\mathrm{P}_2$의 값을 구하시오. [3점]

23. $\tan\theta=\sqrt{15}$일 때, $\sec\theta$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]

24. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{7}{6}$일 때, $90(a-b)$의 값을 구하시오. [3점]

25. 좌표평면 위의 직선 $l_1 : \frac{x-8}{3}=\frac{6-y}{4}$와 수직이고 점 $(0,2)$를 지나는 직선 l_2가 있다. 직선 l_1 위의 점 P와 직선 l_2의 방향벡터 $\vec{u}$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이다.) [3점]

26. 정규분포 $\mathrm{N}(7, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X와 실수 a에 대하여

$$p_1=\mathrm{P}(a-3\le X\le a)$$

$$p_2=\mathrm{P}(a\le X\le a+2)$$

$$p_3=\mathrm{P}(a+2\le X\le a+5)$$

라 할 때, $p_1=p_2=p_3$을 만족시킨다.

$\mathrm{P}(6\le X\le 11)=k\times\mathrm{P}(3\le X\le 7)$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

27. 포물선 $C_1 : y^2 = 4x+4$와 초점을 공유하고 C_1이 y축과 만나는 두 점 중 하나를 꼭짓점으로 하는 포물선을 C_2라 하자. 두 포물선 C_1, C_2가 만나는 두 점 중 y축 위에 있지 않은 점을 P라 할 때, 선분 OP의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

28. 검은 바둑돌과 흰 바둑돌을 다음과 같은 규칙에 따라 일렬로 나열하려고 한다.

(가) 나열한 검은 바둑돌과 흰 바둑돌 개수의 합은 8이다.
(나) 검은 바둑돌은 서로 이웃하지 않아야 한다.

나열한 검은 바둑돌의 개수가 2 이상인 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 8개 이상씩 있다.) [4점]

29. 좌표공간에 두 구 $S_1 : x^2+y^2+z^2=25$, $S_2 : (x-8)^2+y^2+z^2=9$와 평면 $\alpha : x-2\sqrt{2}z-5=0$이 있다. 두 구 S_1, S_2의 접점을 A, 평면 α와 구 S_2가 만나서 생기는 도형을 C라 할 때, 구 S_1 위의 점 P와 원 C 위의 점 Q가

$$3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$$

을 만족시킨다. $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $k\times\dfrac{M}{m}$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, k는 상수이다.) [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x)=\ln\{(x-a)^2+b\}-x$$

가 있다. 실수 t와 상수 m에 대하여 방정식 $f(x)=mx+t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 임의의 두 실수 x_1, x_2 $(x_1<x_2)$에 대하여 $f(x_2)-f(x_1)<0$이다.
(나) 방정식 $g(t)=c$가 실근이 존재하도록 하는 서로 다른 실수 c의 개수는 1이 아니다.
(다) 함수 $f(t)g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(2)=a-2$일 때, $e^{f(0)}=pe^2+q$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.) [4점]